

## Clase 11

En el capítulo anterior aprendimos a definir funciones usando el concepto de integral, en esta ocasión aprovecharemos esta técnica para introducir de manera formal las funciones trigonométricas.

### Las Funciones Trigonométricas Primera Parte

Recordemos, de nuestros cursos de geometría, que la ecuación  $x^2 + y^2 = 1$  describe el conjunto de puntos  $(x, y)$  en el plano que pertenecen a la circunferencia unitaria con centro en el origen. Así, si consideramos la función  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

tenemos que la gráfica de  $f$  coincide con la semicircunferencia unitaria por encima del eje horizontal (vea Figura 1). Más aún, la función  $f$  es continua en  $[-1, 1]$ , por lo que  $f$  es integrable en  $[-1, 1]$ .

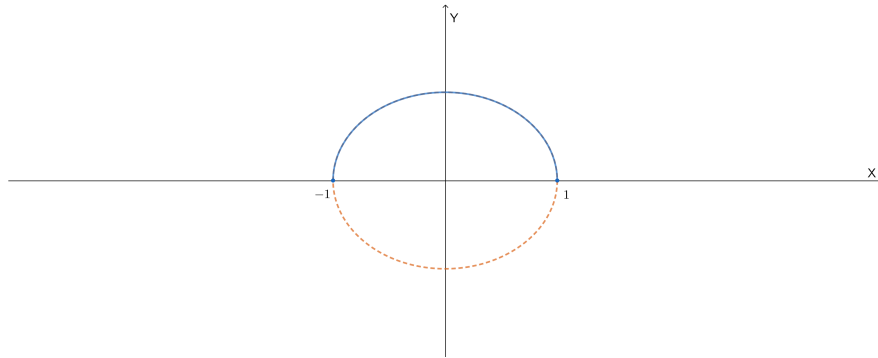


Figura 1: Se muestra la gráfica de  $f$  sobre la circunferencia unitaria.

**Definición 1** Definimos el número  $\pi$  como sigue

$$\pi = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} \, dt.$$

**Definición 2** Definimos la función  $A : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mediante la siguiente regla de correspondencia

$$A(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \int_x^1 \sqrt{1-t^2} \, dt.$$

Note que, por el Teorema Fundamental del Cálculo,  $A$  es derivable en  $(-1, 1)$  y para cada  $x \in (-1, 1)$  se tiene que

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{1}{2} \left[ \sqrt{1-x^2} + x \left( \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \right) \right] - \sqrt{1-x^2} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(1-x^2) - x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right] - \sqrt{1-x^2} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(1-x^2) - x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \right] \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Note que  $A'(x) < 0$  para cada  $x \in (-1, 1)$ , por lo que  $A$  es decreciente en  $(-1, 1)$ . Ahora, usando que es continua en  $[-1, 1]$ , tenemos que  $A$  decrece desde  $A(-1)$  hasta  $A(1)$ . Pero

$$A(-1) = 0 + \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad A(1) = 0,$$

así que  $A$  decrece desde  $\pi/2$  hasta 0 (vea Figura 2). Note también que, por ser decreciente en  $[-1, 1]$ ,  $A$  es inyectiva en  $[-1, 1]$ .

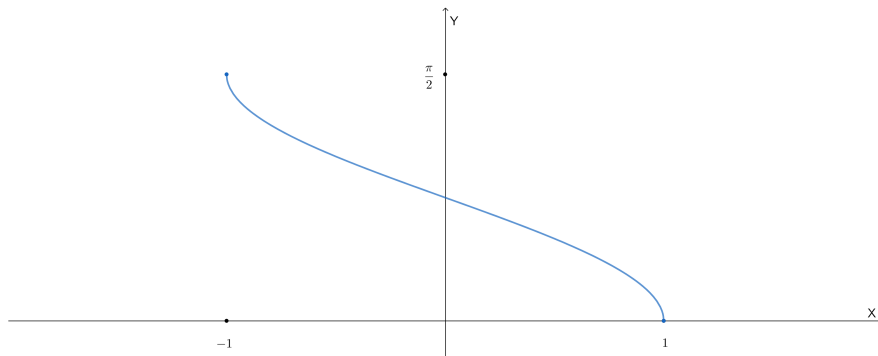


Figura 2: Gráfica de la función  $A$ .

**Definición 3** Definimos las funciones  $\cos, \sin : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  como sigue,  $\cos(x)$  es el único número del intervalo  $[-1, 1]$  tal que

$$A(\cos(x)) = \frac{x}{2}$$

y  $\sin(x)$  como

$$\sin(x) = \sqrt{1 - (\cos(x))^2}.$$

Note que por definición  $|\cos(x)| \leq 1$  y  $|\sin(x)| \leq 1$  para todo  $x \in [0, \pi]$ . Ahora, una vez definidas las funciones  $\cos$  y  $\sin$  (aunque de momento solo en  $[0, \pi]$ ) nos gustaría demostrar que son derivables y para ello es necesario recordar el siguiente teorema visto en los cursos de Cálculo I.

**Teorema 4 (Teorema de la Función Inversa)** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua e inyectiva en  $[a, b]$ , y supongamos que  $f$  es derivable en  $f^{-1}(y)$ , con derivada  $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$ . Entonces  $f^{-1}$  es derivable en  $y$ , y

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

**Teorema 5** Las funciones  $\cos$  y  $\sin$  son derivables en  $(0, \pi)$  y para cada  $x \in (0, \pi)$  se tiene que

$$\cos'(x) = -\sin(x) \quad y \quad \sin'(x) = \cos(x).$$

**Demostración.** Sea  $B : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por  $B(x) = 2A(x)$ . Como  $A$  es derivable en  $(-1, 1)$ ,  $B$  es derivable en  $(-1, 1)$  y para cada  $x \in (-1, 1)$ , se tiene que

$$B'(x) = 2A'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ahora, para cada  $x \in [0, \pi]$ , se tiene que  $B(\cos(x)) = 2A(\cos(x)) = x$ , es decir,  $\cos$  es la función inversa de la función  $B$ . Así que, por el Teorema 4, tenemos que  $\cos$  es derivable en  $(0, \pi)$  y

$$\begin{aligned} \cos'(x) &= (B^{-1})'(x) \\ &= \frac{1}{B'(B^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{\frac{-1}{\sqrt{1-(B^{-1}(x))^2}}} \\ &= -\sqrt{1-(\cos(x))^2} \\ &= -\sin(x). \end{aligned}$$

Por otro lado, como  $\sin(x) = \sqrt{1-(\cos(x))^2}$ , tenemos que es composición de funciones derivables, por lo tanto es derivable, y por la regla de la cadena tenemos que, para cada  $x \in (0, \pi)$ ,

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \frac{1}{2} \left( \frac{-2\cos(x)\cos'(x)}{\sqrt{1-(\cos(x))^2}} \right) \\ &= \frac{\cos(x)\sin(x)}{\sin(x)} \\ &= \cos(x). \end{aligned}$$

■

**Ejemplo 6** Esboce las gráficas de las funciones  $\cos$  y  $\sin$ .

**Solución.** Para la función  $\cos$  tenemos, por el Teorema 5, que  $\cos'(x) = -\sin(x) < 0$ , para todo  $x \in (0, \pi)$ . Se sigue que la función  $\cos$  decrece desde  $\cos(0) = 1$  hasta  $\cos(\pi) = -1$  (por lo tanto también resulta inyectiva). Ahora, por el Teorema del Valor Intermedio, tenemos que existe (un único)  $x_0 \in (0, \pi)$  tal que  $\cos(x_0) = 0$ , pero  $\cos(x_0)$  es el único número del intervalo  $[-1, 1]$  tal que

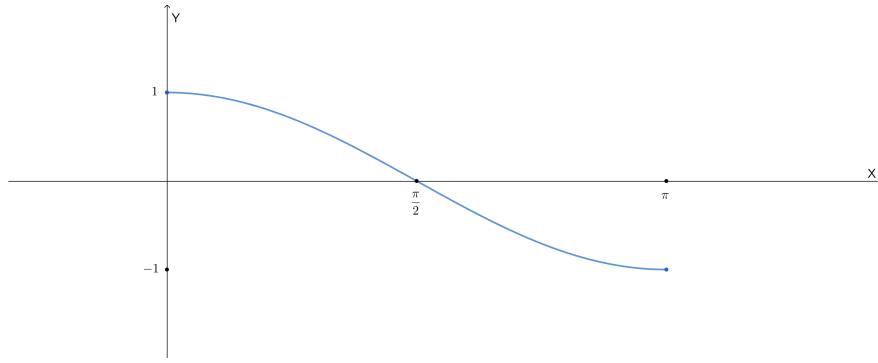
$$A(\cos(x_0)) = \frac{x_0}{2},$$

así que

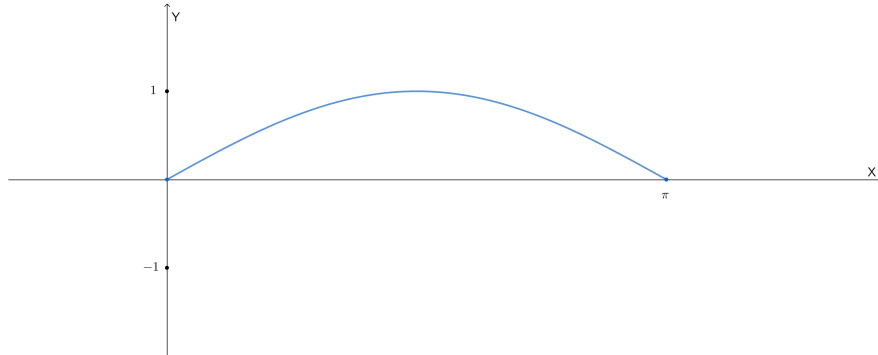
$$A(0) = \frac{x_0}{2},$$

es decir,

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{x_0}{2}.$$



(a) Gráfica de  $\cos$  en  $[0, \pi]$



(b) Gráfica de  $\text{sen}$  en  $[0, \pi]$

Figura 3

Ahora, usando que la función  $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$  es par, se tiene que

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx = \int_{-1}^0 \sqrt{1 - x^2} \, dx,$$

de donde

$$\pi = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx = 4 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx.$$

Se sigue que  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ . Ahora, para la función  $\text{sen}$  tenemos que  $\text{sen}'(x) = \cos(x)$ , pero en este caso  $\cos(x) > 0$  cuando  $x \in (0, \pi/2)$  y  $\cos(x) < 0$  cuando  $x \in (\pi/2, \pi)$ , así que  $\text{sen}$  es creciente en  $[0, \pi/2]$  desde  $\text{sen}(0) = 0$  hasta  $\text{sen}(\pi/2) = 1$  y decreciente en  $[\pi/2, \pi]$  desde  $\text{sen}(\pi/2) = 1$  hasta  $\text{sen}(\pi) = 0$ . Vea Figuras 3a y 3b. ■