

Clase 12

Comenzamos este documento recordando un par de definiciones y un teorema vistos la clase anterior:

Definición 1 Definimos la función $A : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la siguiente regla de correspondencia

$$A(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \int_x^1 \sqrt{1-t^2} dt.$$

Definición 2 Definimos las funciones $\cos, \text{sen} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue, $\cos(x)$ es el único número del intervalo $[-1, 1]$ tal que

$$A(\cos(x)) = \frac{x}{2}$$

y $\text{sen}(x)$ como

$$\text{sen}(x) = \sqrt{1 - (\cos(x))^2}.$$

Teorema 3 Las funciones $\cos$ y sen son derivables en $(0, \pi)$ y para cada $x \in (0, \pi)$ se tiene que

$$\cos'(x) = -\text{sen}(x) \quad y \quad \text{sen}'(x) = \cos(x).$$

En esta ocasión “extenderemos” el dominio de $\cos$ y sen a todo $\mathbb{R}$

Las Funciones Trigonométricas Segunda Parte

Definición 4 (1) Para cada $x \in [\pi, 2\pi]$, definimos $\cos(x)$ y $\text{sen}(x)$ como

$$\cos(x) = \cos(2\pi - x) \quad y \quad \text{sen}(x) = -\text{sen}(2\pi - x).$$

(2) Si $x \in (-\infty, 0) \cup (2\pi, \infty)$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ y $x' \in [0, 2\pi]$ de tal manera que $x = 2\pi k + x'$, así, definimos $\cos(x)$ y $\text{sen}(x)$ como

$$\cos(x) = \cos(x') \quad y \quad \text{sen}(x) = \text{sen}(x').$$

Definición 5 Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es periódica de periodo $p \neq 0$ si

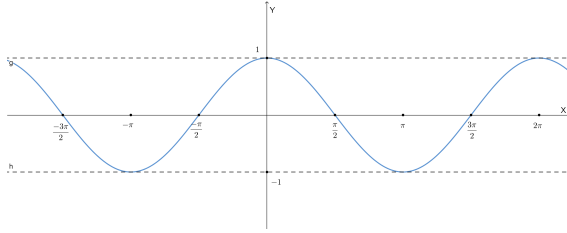
$$f(x) = f(x + p)$$

para todo $x \in A$. Al número p lo llamamos un periodo de f .

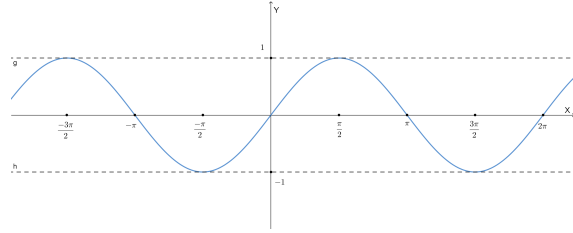
Observación 6 De la Definición 4, se sigue que:

(1) $|\cos(x)| \leq 1$ y $|\text{sen}(x)| \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(2) Las funciones $\cos$ y sen son continuas en todo $\mathbb{R}$.



(a) Gráfica de la función coseno.



(b) Gráfica de la función seno.

Figura 1

(3) Las funciones cos y sen son periódicas de periodo 2π .

(4) $\cos(x) = 0$ si y sólo si $x \in \{k\pi + \pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

(5) $\sin(x) = 0$ si y sólo si $x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

En el siguiente teorema mostraremos que, una vez “extendidas”, las funciones sen y cos son derivables en todo $\mathbb{R}$ y que los puntos de la forma $(\cos(x), \sin(x))$ son puntos sobre la circunferencia unitaria para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Pero, para la demostración de las primeras dos propiedades debemos recordar el siguiente resultado de nuestros cursos de Cálculo I.

Proposición 7 Sean $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $c \in (a, b)$. Si f es derivable en (a, b) , quizás excepto en c , y $\lim_{x \rightarrow c} f'(x)$ existe, entonces f es derivable en c y

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} f'(x).$$

Y en cuanto a la notación, escribiremos $\sin^2(x)$ en vez de $(\sin(x))^2$ y $\cos^2(x)$ en vez de $(\cos(x))^2$. Debemos observar que $\sin^2(x) \neq \sin(x^2)$ y $\cos^2(x) \neq \cos(x^2)$.

Teorema 8 Las funciones $\cos, \sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfacen para cada $x \in \mathbb{R}$:

(1) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1,$

(2) $\cos'(x) = -\sin(x)$

(3) $\sin'(x) = \cos(x)$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$. Mostraremos únicamente los incisos (1) y (2), pues el inciso (3) es muy similar a (2).

(1) Si $x \in [0, \pi]$, tenemos, por la Definición 2, que $\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}$, así que

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Ahora, si $x \in [\pi, 2\pi]$, tenemos, por la Definición 4, que $\cos(x) = \cos(2\pi - x)$ y $\sin(x) = -\sin(2\pi - x)$, pero note que en este caso $2\pi - x \in [0, \pi]$, por lo que $\sin^2(2\pi - x) + \cos^2(2\pi - x) = 1$, es decir

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

Finalmente, si $x \in (-\infty, 0) \cup (2\pi, \infty)$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ y $x' \in [0, 2\pi]$ de tal manera que $x = 2\pi k + x'$, así, por la Definición 4, tenemos que $\cos(x) = \cos(x')$ y $\sin(x) = \sin(x')$, pero $x' \in [0, 2\pi]$, así que $\cos^2(x') + \sin^2(x') = 1$. Esto es,

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

- (2) Ya hemos visto, en el Teorema 3, que $\cos'(x) = -\sin(x)$ para cada $x \in (0, \pi)$. Consideremos ahora $x \in (\pi, 2\pi)$. Se tiene, por la Definición 4, que $\cos(x) = \cos(2\pi - x)$, es decir, en este caso la función $\cos$ es una composición de funciones derivables, por lo que resulta derivable y

$$\cos'(x) = [\cos(2\pi - x)]' = -\sin(2\pi - x)(-1) = \sin(2\pi - x) = -\sin(x),$$

donde la última igualdad se tiene por la Definición 4.

Ahora, si $x = 2\pi k + x'$, para algún $k \in \mathbb{Z}$ y $x' \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$, tenemos, por la Definición 4, que $\cos(x) = \cos(x')$, es decir, $\cos(x) = \cos(x - 2\pi k)$. En este caso también se tiene que la función $\cos$ es una composición de funciones derivables, por lo que resulta derivable y

$$\cos'(x) = [\cos(x - 2\pi k)]' = -\sin(x - 2\pi k)(1) = -\sin(x - 2\pi k) = -\sin(x') = -\sin(x).$$

Note que de los tres casos anteriores podemos concluir que $\cos$ es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Finalmente, consideremos $c = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Se tiene que $\cos$ es derivable en $(c - \pi, c + \pi) \setminus \{c\}$ y $\lim_{x \rightarrow c} \cos'(x) = \lim_{x \rightarrow c} (-\sin(x)) = -\sin(c)$, pues $\sin$ es continua en $\mathbb{R}$. Así, por la Proposición 7, tenemos que $\cos$ es derivable en c y

$$\cos'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \cos'(x) = -\sin(c).$$

Concluimos que $\cos$ es derivable en todo $\mathbb{R}$ y $\cos'(x) = -\sin(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

■