Última actualización: 2 de marzo de 2023

Clase 13

Como cada sesión, recordemos algo de lo visto en la clase anterior:

Observación 1 *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) $|\cos(x)| \leq 1$ *y* $|\text{sen}(x)| \leq 1$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

(2) Las funciones cos *y* sen *son continuas en todo* $\mathbb{R}$.

(3) Las funciones cos *y* sen *son periodicas de periodo* 2π.

(4) $\cos(x) = 0$ *si y sólo si* $x \in \{k\pi + \pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

(5) $\text{sen}(x) = 0$ *si y sólo si* $x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

En esta ocasión demostraremos las "fórmulas de suma de ángulos" para las funciones sen y cos vistas en nuestros cursos de geometría, además definiremos las últimas funciones trigonométricas.

Las Funciones Trigonométricas
Tercera Parte

Lema 2 *Sea* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función que es dos veces derivable en todo* $\mathbb{R}$. *Si*

$$\begin{aligned} f'' + f &= 0, \\ f(0) &= 0, \\ f'(0) &= 0, \end{aligned}$$

entonces f *es la función constante cero.*

Demostración. De la primer identidad, tenemos que

$$f'f'' + f'f = 0$$

y de aquí que

$$\left[(f')^2 + f^2\right]' = 2\left[f'f'' + f'f\right] = 0.$$

Por lo tanto, la función $(f')^2 + f^2$ es una función constante, digamos $c \in \mathbb{R}$. Es decir, para cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$(f')^2(x) + f^2(x) = c.$$

En particular tenemos que

$$0 = 0 + 0 = (f')^2(0) + f^2(0) = c.$$

Así que

$$(f')^2(x) + f^2(x) = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Finalmente, como ambos sumandos son no negativos, concluimos que $f(x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$. ∎

Lema 3 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que es dos veces derivable en todo $\mathbb{R}$. Si*

$$\begin{aligned} f'' + f &= 0, \\ f(0) &= a, \\ f'(0) &= b, \end{aligned}$$

entonces $f(x) = b\operatorname{sen}(x) + a\cos(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Consideremos la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = f(x) - b\operatorname{sen}(x) - a\cos(x).$$

Por hipótesis, f es dos veces derivable en $\mathbb{R}$ y además sabemos que cos y sen son dos veces derivables en todo $\mathbb{R}$, así que g es dos veces derivable en todo $\mathbb{R}$. Luego, tenemos para cada $x \in \mathbb{R}$ que

$$g'(x) = f'(x) - b\cos(x) + a\operatorname{sen}(x) \quad \text{y} \quad g''(x) = f''(x) + b\operatorname{sen}(x) + a\cos(x).$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} g'' + g &= 0, \\ g(0) &= 0, \\ g'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Y, por el lema anterior, tenemos que $g(x) = f(x) - b\operatorname{sen}(x) - a\cos(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$f(x) = b\operatorname{sen}(x) + a\cos(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

Teorema 4 *Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se satisface que*

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha) \quad y \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta).$$

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Mostraremos solo la primer identidad y para ello consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \operatorname{sen}(x + \beta).$$

Note que f es dos veces derivable en todo $\mathbb{R}$ y que, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \cos(x + \beta) \quad \text{y} \quad f''(x) = -\operatorname{sen}(x + \beta).$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} f'' + f &= 0, \\ f(0) &= \operatorname{sen}(\beta), \\ f'(0) &= \cos(\beta). \end{aligned}$$

Luego, por el Lema anterior, $f(x) = \cos(\beta)\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(\beta)\cos(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. En particular, para $x = \alpha$ tenemos que

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha).$$

■

La siguiente definición tiene sentido gracias a la Observación 1, incisos (4) y (5).

Definición 5 *Definimos las funciones* $\sec, \tan : \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *como*

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \qquad y \qquad \tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}.$$

Y las funciones $\csc, \cot : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *como*

$$\csc(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \qquad y \qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}.$$

Teorema 6 *Las funciones* $\sec, \tan, \csc$ *y* $\cot$ *son derivables en sus respectivos dominios y para cada* x *en el dominio correspondiente se tiene que*

$$\sec'(x) = \sec(x)\tan(x), \quad \tan'(x) = \sec^2(x), \quad \csc'(x) = -\csc(x)\cot(x) \quad y \quad \cot'(x) = -\csc^2(x).$$

Demostración. Demostraremos solo que *sec* y cot son derivables en sus respectivos dominios, pues la demostración para las otras dos funciones son análogas.
Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$, entonces $\cos(x) \neq 0$ y como cos es derivable, entonces sec es derivable en x y

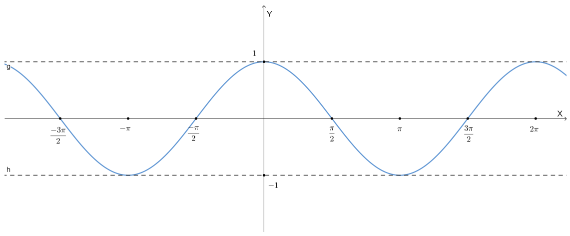
$$\begin{aligned}
\sec'(x) &= \left(\frac{1}{\cos(x)}\right)' \\
&= \frac{0 \cdot \cos(x) - 1(-\operatorname{sen}(x))}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \\
&= \sec(x)\tan(x).
\end{aligned}$$

Ahora, si $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, entonces $\operatorname{sen}(x) \neq 0$ y como sen y cos son derivables, entonces cot es derivable en x y

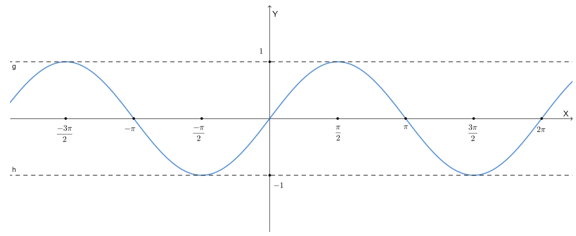
$$\begin{aligned}
\cot'(x) &= \left(\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\right)' \\
&= \frac{(-\operatorname{sen}(x))\operatorname{sen}(x) - \cos(x)(\cos(x))}{\operatorname{sen}^2(x)} \\
&= \frac{(-1)\left(\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)\right)}{\operatorname{sen}^2(x)} \\
&= \frac{-1}{\operatorname{sen}^2(x)} \\
&= -\left(\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right)^2 \\
&= -\csc^2(x).
\end{aligned}$$

■

Utilizando este teorema es posible esbozar las gráficas de estas funciones (inténtelo).

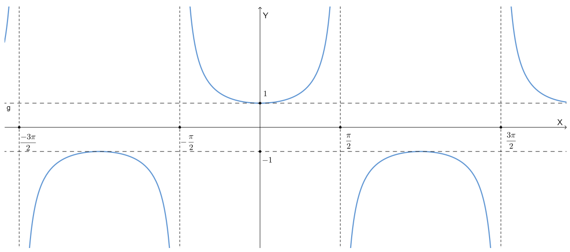


(a) Gráfica de la función coseno.

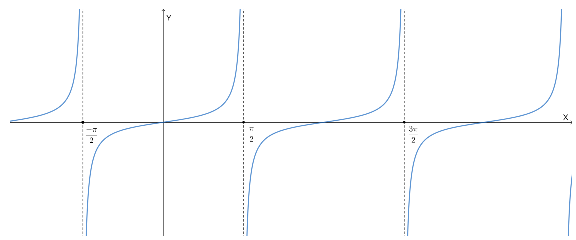


(b) Gráfica de la función seno.

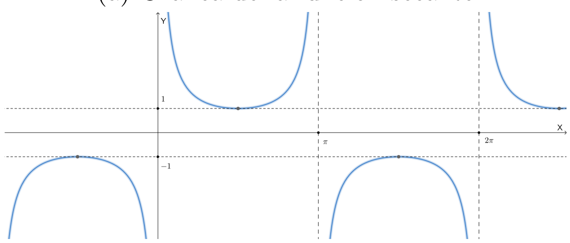
Figura 1



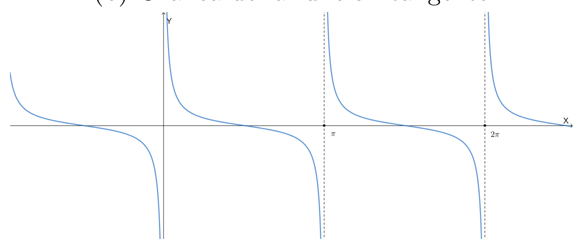
(a) Gráfica de la función secante



(b) Gráfica de la función tangente



(c) Gráfica de la función cosecante



(d) Gráfica de la función cotangente

Figura 2

Como uno puede apreciar (por ejemplo en las figuras 1 y 2) las funciones trigonométricas no son inyectivas en sus dominios y por lo tanto no tiene sentido pensar en las funciones inversas de las funciones trigonométricas. Aunque, seguramente en este momento están recordando que alguna vez trabajaron con unas funciones llamadas arcoseno, arcocoseno y arcotangente y que estas funcionaban como si fueran las inversas de las funciones trigonométricas, pero entonces ¿existen o no?