

Clase 14

Para esta sesión es necesario recordar el siguiente teorema:

Teorema 1 (Teorema de la Función Inversa) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva en $[a, b]$, y supongamos que f es derivable en $f^{-1}(y)$, con derivada $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$. Entonces f^{-1} es derivable en y , y

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Como seguramente recordarán, las funciones trigonométricas no son inyectivas en sus dominios, por lo que no existen las funciones inversas de las funciones trigonométricas como tal, pero si restringimos el dominio de las funciones trigonométricas a los intervalos de mayor longitud donde estas sí son inyectivas, tendría sentido pensar en las funciones inversas.

Las “Funciones Inversas” de las Funciones Trigonométricas

Definición 2 Sean $f : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ y $h : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones dadas por

$$f(x) = \text{sen}(x), \quad g(x) = \text{cos}(x) \quad \text{y} \quad h(x) = \text{tan}(x).$$

Las funciones f , g y h son funciones inyectivas en su dominio, por lo que tiene sentido considerar $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ y $h^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Estas funciones las llamaremos arcoseno, arcocoseno y arcotangente y las denotaremos por arc sen , arc cos y arctan respectivamente (vea figura 1).

Observación 3 Las funciones f , g y h de la definición anterior NO son las funciones trigonométricas (recuerde que dos funciones son iguales si tienen el mismo dominio, el mismo codominio y la misma regla de correspondencia), pero, a pesar de esto, es común llamar a f^{-1} , g^{-1} y a h^{-1} , es decir, a arcoseno, arcocoseno y arcotangente las funciones inversas de las funciones trigonométricas, y en este curso esto no será la excepción.

Teorema 4 (1) Las funciones arc cos y arc sen son derivables en $(-1, 1)$ y

$$\text{arc cos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{y} \quad \text{arc sen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

para todo $x \in (-1, 1)$.

(2) La función arctan es derivable en todo \mathbb{R} y

$$\text{arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración.

- (1) Solo demostraremos que \arccos es derivable, pues la demostración para \arcsen es totalmente análoga.

Se tiene que la función g de la Definición 2 es derivable en $(0, \pi)$ y $g'(y) = -\sen(y) \neq 0$ para cada $y \in (0, \pi)$. Así, por el Teorema 1, g^{-1} es derivable en $(-1, 1)$ y

$$\arccos'(x) = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{-\sen(\arccos(x))},$$

para cada $x \in (-1, 1)$. Ahora, dado que $\sen^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, y la definición de \arccos , tenemos que

$$\begin{aligned} 1 &= \sen^2(\arccos(x)) + \cos^2(\arccos(x)) \\ &= \sen^2(\arccos(x)) + (\cos(\arccos(x)))^2 \\ &= \sen^2(\arccos(x)) + x^2. \end{aligned}$$

para cada $x \in (-1, 1)$. De esto último se sigue que

$$\sen(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

(¡No falta un *valor absoluto* en la última igualdad?). Por lo tanto,

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

para cada $x \in (-1, 1)$.

- (2) La función h de la Definición 2 es derivable en $(-\pi/2, \pi/2)$ y $h'(y) = \sec^2(y) \neq 0$ para cada $y \in (-\pi/2, \pi/2)$. Así, por el Teorema 1, h^{-1} es derivable en \mathbb{R} y

$$\arctan'(x) = (h^{-1})'(x) = \frac{1}{h'(h^{-1}(x))} = \frac{1}{\sec^2(\arctan(x))},$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. Luego, usando una vez más que $\sen^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$1 = \sen^2(\arctan(x)) + \cos^2(\arctan(x)).$$

Luego, dividiendo esta última igualdad por $\cos^2(\arctan(x)) \neq 0$ y usando la definición de \arctan , tenemos que

$$\begin{aligned} \sec^2(\arctan(x)) &= \tan^2(\arctan(x)) + 1 \\ &= (\tan(\arctan(x)))^2 + 1 \\ &= x^2 + 1. \end{aligned}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. De donde

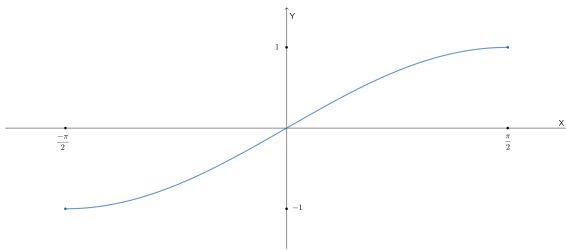
$$\sec^2(\arctan(x)) = 1 + x^2.$$

Por lo tanto,

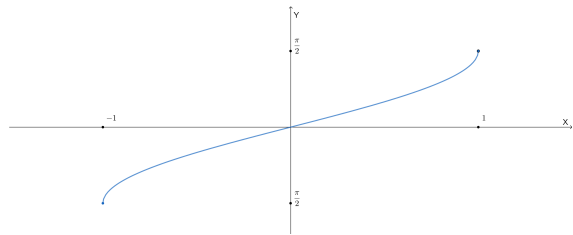
$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.

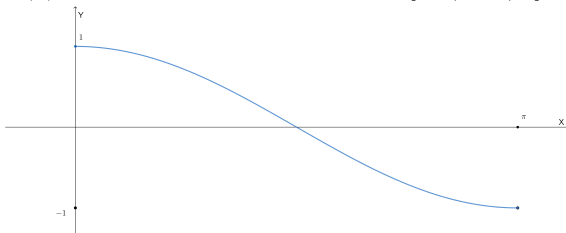
■



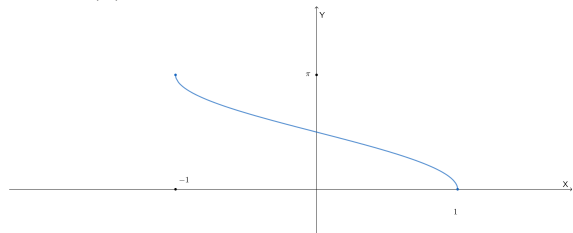
(a) Gráfica de seno restringida a $[-\pi/2, \pi/2]$.



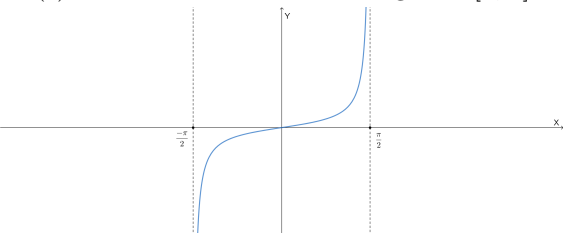
(b) Gráfica de la función arcoseno.



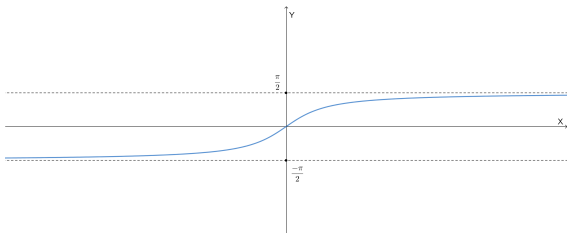
(c) Gráfica de la coseno restringida a $[0, \pi]$.



(d) Gráfica de la función arcocoseno.



(e) Gráfica de la tangente restringida a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.



(f) Gráfica de la función arcotangente.

Figura 1: Gráficas de las funciones trigonométricas y sus respectivas “funciones inversas”.