

Clase 15

La clase anterior demostramos los siguientes resultados:

Lema 1 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que es dos veces derivable en todo $\mathbb{R}$. Si

$$\begin{aligned}f'' + f &= 0, \\f(0) &= a, \\f'(0) &= b,\end{aligned}$$

entonces $f(x) = b \sin(x) + a \cos(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 2 Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se satisface que

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\alpha) \quad \text{y} \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta).$$

En esta sesión aplicaremos los resultados mencionados anteriormente para obtener/justificar afirmaciones que ya conocíamos sobre las funciones trigonométricas.

Algunos resultados sobre las funciones trigonométricas

Recuerde que una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada **función par** si $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y es llamada **función impar** si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Proposición 3 La función $\cos$ es una función par mientras que la función $\sin$ es una función impar.

Demostración. Mostraremos solo la primera afirmación y la otra quedará como tarea. Debemos demostrar que $\cos(-x) = \cos(x)$ para todo número real x .

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por la siguiente regla de correspondencia

$$f(x) = \cos(-x) - \cos(x).$$

Note que la función f es dos veces derivable pues es diferencia de dos funciones dos veces derivables ($\cos(-x)$ es una composición de funciones dos veces derivables) y para cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$f'(x) = \sin(-x) + \sin(x) \quad \text{y} \quad f''(x) = -\cos(-x) + \cos(x).$$

Observe que $f'' + f = 0$, $f(0) = 0$ y que $f'(0) = 0$. Así, por el Lema 1, se tiene que $f(x) = 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Se sigue que

$$\cos(-x) = \cos(x),$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, esto es, $\cos$ es una función par. ■

Ejemplo 4 Halle, usando el Teorema 2, una fórmula para $\cos(2\alpha)$ y utilice esta fórmula para hallar el valor de $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ y $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Solución. Por el Teorema 2, sabemos que

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos(\alpha)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\sin(\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

Por otro lado, sabemos que $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, para cualquier $x \in \mathbb{R}$, por lo que

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = \cos^2(\alpha) - [1 - \cos^2(\alpha)] = 2\cos^2(\alpha) - 1. \quad (1)$$

Note también que

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = [1 - \sin^2(\alpha)] - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha). \quad (2)$$

Ahora, sabemos que $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ y que $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, por lo que, de (1), se tiene que

$$0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1,$$

luego,

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

Pero, $\cos(x) > 0$, para todo $x \in (0, \pi/2)$ y $\pi/4 \in (0, \pi/2)$, por lo que

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por otro lado, de (2), se tiene que

$$0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

y de aquí que

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

Como $\sin(x) > 0$, para todo $x \in (0, \pi/2)$ y $\pi/4 \in (0, \pi/2)$, se sigue que

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Finalmente, tenemos que

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1.$$

■

Ejemplo 5 Sean $a < b$ dos números reales. Halle las siguientes integrales

$$\int_a^b \cos^2(t) \, dt \quad y \quad \int_a^b \sin^2(t) \, dt.$$

Solución. De las identidades (1) y (2) se tiene que

$$\int_a^b \cos^2(t) \, dt = \frac{1}{2} \int_a^b (1 + \cos(2t)) \, dt$$

y que

$$\int_a^b \sin^2(t) \, dt = \frac{1}{2} \int_a^b (1 - \cos(2t)) \, dt.$$

Consideremos ahora las funciones $f(t) = 1 + \cos(2t)$ y $h(t) = 1 - \cos(2t)$. Se tiene que las funciones $g(t) = t + \frac{1}{2} \sin(2t)$ y $j(t) = t - \frac{1}{2} \sin(2t)$ cumplen que $g' = f$ y $j' = h$, por lo que, del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene que

$$\frac{1}{2} \int_a^b (1 + \cos(2t)) \, dt = \frac{1}{2} \int_a^b f(t) \, dt = \frac{1}{2} (g(b) - g(a)) = \frac{1}{2} (b - a) + \frac{1}{4} (\sin(2b) - \sin(2a))$$

y que

$$\frac{1}{2} \int_a^b (1 - \cos(2t)) \, dt = \frac{1}{2} \int_a^b h(t) \, dt = \frac{1}{2} (j(b) - j(a)) = \frac{1}{2} (b - a) - \frac{1}{4} (\sin(2b) - \sin(2a)).$$

■