Última actualización: 16 de marzo de 2023

Clase 18

Recordemos, antes de iniciar esta clase, algunos resultados que ocuparemos en esta sesión:

Observación 1 *Se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

(1) $\ln(1) = 0$.

(2) Si $1 < x$, *entonces* $\ln(x) > 0$.

(3) Si $0 < x < 1$, *entonces* $\ln(x) < 0$.

(4) Por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, $\ln$ *es derivable en* $(0, \infty)$ *y* $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ *para cada* $x \in \mathbb{R}^+$. *De aquí que* $\ln$ *sea creciente en su dominio.*

Teorema 2 *Para cualesquiera* $x, y \in \mathbb{R}^+$ *se satisface que*

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

En esta ocasión introduciremos la función exponencial.

La Función Exponencial

Como vimos en la Observación 1, logaritmo natural es una función creciente en su dominio, por lo que resulta una función inyectiva en su dominio, así que podemos considerar la función inversa del logaritmo natural.

Definición 3 *Definimos la función **exponencial**, denotada por* $\exp$ *como la función* $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$\exp(x) = \ln^{-1}(x).$$

Note que $\exp(x) \in (0, \infty)$, para cualquier $x \in \mathbb{R}$, pues $(0, \infty)$ es el dominio de la función logaritmo natural. Con esta observación podríamos darnos una idea de cómo es la gráfica de la función exponencial, pero esperaremos a demostrar más propiedades de la función exponencial.

Teorema 4 *Para cualquier* $x \in \mathbb{R}$ *se cumple que*

$$\exp'(x) = \exp(x).$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$. Por el Teorema de la Función Inversa, tenemos que

$$\begin{aligned}
\exp'(x) &= \left(\ln^{-1}\right)'(x) \\
&= \frac{1}{\ln'\left(\ln^{-1}(x)\right)} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{1}{\ln^{-1}(x)}\right)} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{1}{\exp(x)}\right)} \\
&= \exp(x).
\end{aligned}$$

■

Note entonces que exp es una función creciente, pues $\exp'(x) = \exp(x) > 0$.

Teorema 5 *Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ se satisface que*

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Demostración. Sean $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ tales que $u = \exp(x)$ y $v = \exp(y)$. Entonces, se tiene que

$$\ln(u) = x \quad \text{y} \quad \ln(v) = y.$$

Luego, por el Teorema 2,

$$x + y = \ln(u) + \ln(v) = \ln(uv)$$

y de aquí que

$$\exp(x+y) = uv = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

■

¿Recuerda la motivación con la que iniciamos este capítulo? Queremos hallar una función f que cumpla la ecuación

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \tag{1}$$

y una de las cosas importantes era el valor que tomaba dicha función en 1, pues al menos para cualquier racional r se debía cumplir que

$$f(r) = (f(1))^r. \tag{2}$$

Definición 6 *Definimos el número $\boldsymbol{e}$ como*

$$e = \exp(1).$$

Proposición 7 *Se tiene que*

$$2 < e < 4.$$

Demostración. Note que la desigualdad que debemos demostrar es equivalente a

$$\ln(2) < \ln(e) < \ln(4) \tag{3}$$

(¿por qué?). Por lo que demostraremos (3). Para ello, consideremos las particiones $P = \{1, 2\} \in \mathscr{P}_{[1,2]}$ y $Q = \{1, 2, 4\} \in \mathscr{P}_{[1,4]}$. Se tiene que

$$\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt < \overline{S}\left(\frac{1}{t}, P\right) = 1 \cdot (2-1) = 1$$

y

$$1 = \frac{1}{2} \cdot (2-1) + \frac{1}{4} \cdot (4-2) = \underline{S}\left(\frac{1}{t}, Q\right) < \int_1^4 \frac{1}{t}\,dt.$$

Finalmente, como $\ln(e) = \ln(exp(1)) = 1$, tenemos que

$$\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt < \ln(e) < \int_1^4 \frac{1}{t}\,dt,$$

es decir,

$$ln(2) < \ln(e) < \ln(4).$$

$\blacksquare$

Note que esta proposición nos proporciona unas primeras cotas para el número e, más tarde podremos mejorar estas cotas.
Ahora, recordando que la función exp satisface la ecuación (1) y que para cualquier racional r se cumple la ecuación (2), damos la siguiente definición.

Definición 8 *Para cualquier número $x \in \mathbb{R}$ definimos $\boldsymbol{e^x}$ como*

$$e^x = \exp(x).$$

Note que hemos logrado definir exponentes de cualquier tipo (¡incluso irracionales!) aunque, por el momento, solo para una base, para el número e.

Como vimos en el Teorema 4, la función exponencial cumple ser igual a su derivada, pero ¿será la única función que satisface esto?

Teorema 9 *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una fiunción derivable en todo $\mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$,*

$$f'(x) = f(x).$$

Entonces, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = ce^x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Consideremos la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^x}.$$

Note que la función g está bien definida pues $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, además es derivable en todo su dominio y

$$g'(x) = \frac{e^x f'(x) - f(x)e^x}{(e^x)^2} = 0,$$

donde la última igualdad se da pues $f'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Así, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De esto último se sigue que

$$f(x) = ce^x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. $\blacksquare$

Continuamos con el siguiente teorema.

Teorema 10 *Se cumplen las siguientes afirmaciones*

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$.

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Demostración.

(1) Note lo siguiente, si $0 < x < 1$, entonces $\ln(x) < 0$, de donde

$$\ln(x) < x.$$

Ahora, si $x > 1$, consideremos $P = \{1, x\} \in \mathscr{P}_{[1,x]}$. Luego,

$$\int_1^x \frac{1}{t}\, dt < \overline{S}\left(\frac{1}{t}, P\right),$$

es decir,

$$\ln(x) < 1 \cdot (x - 1),$$

de donde,

$$\ln(x) < x.$$

Así, $\ln(x) < x$ y de aquí que $x < e^x$, para todo $x \in (0, \infty)$. Ahora, como $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$ se sigue que

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty.$$

(2) Sea $\varepsilon > 0$. Supongamos además, sin pérdida de generalidad, que $\varepsilon < 1$. De esta manera, se tiene que $\ln(\varepsilon) < 0$ y si $x < \ln(\varepsilon)$, entonces

$$e^x < \varepsilon.$$

Esto es,

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

■

Otra propiedad muy importante de la función exponencial es el hecho de que "le gana a cualquier polinomio."

Teorema 11 *Sea* $n \in \mathbb{N}$. *Se satisface que*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty.$$

Demostración. Demostraremos esta afirmación usando inducción matemática. En el Teorema 10 mostramos que para cualquier $x > 0$ se cumple que $e^x > x$. Así,

$$\frac{e^x}{x} = \frac{e^{\frac{x}{2}} \cdot e^{\frac{x}{2}}}{2 \cdot \frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}\right) \cdot e^{\frac{x}{2}} > \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}},$$

para todo $x > 0$. Ahora, otra vez, por el Teorema 10, tenemos que $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$, de donde

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty.$$

Supongamos ahora que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

y demostremos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^{n+1}} = \infty.$$

Note que

$$\frac{e^x}{x^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \cdot \left(\frac{e^{\frac{x}{n+1}}}{\frac{x}{n+1}} \right)^{n+1}.$$

Se sigue, utilizando la hipótesis de inducción, que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^{n+1}} = \infty.$$

■

La información que nos proporciona este Teorema es el hecho de que la función exponencial crece mucho más rapido que cualquier polinomio.

Ahora sí podemos hacer un esbozo de la gráfica de la función e^x.

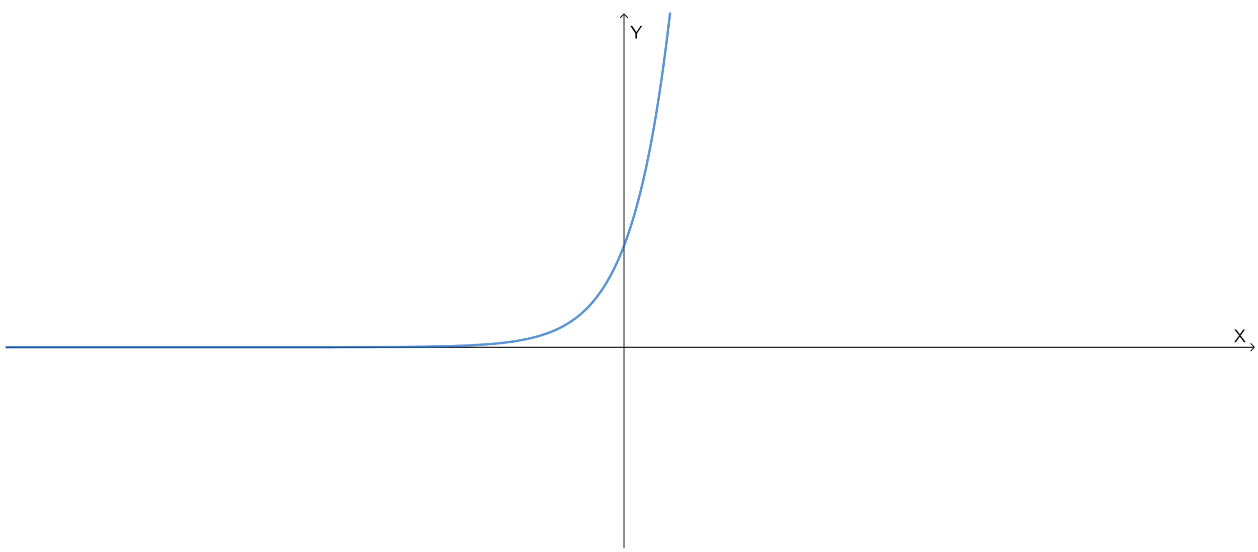

Figura 1: Gráfica de la función exponencial.