Última actualización: 16 de marzo de 2023

Clase 21

Recordemos las siguientes definiciones:

Definición 1 *Definimos la función **exponencial**, denotada por* $\exp$*, como la función* $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $\exp(x) = \ln^{-1}(x)$.

Definición 2 *Para cualquier número* $x \in \mathbb{R}$ *definimos* $\boldsymbol{e^x}$ *como* $e^x = \exp(x)$.

En esta clase, por fin, diremos qué significa elevar a una potencia de cualquier tipo.

Exponentes y bases de "cualquier" tipo

Note que hasta el momento hemos definido e^x para cualquier número real x, pero uno de nuestros propósitos era definir expresiones del tipo a^x para cualquier $a > 0$ (¿por qué positivo?) y cualquier número real x. Ahora podemos hacerlo.

Definición 3 *Sea* $a > 0$*. Definimos, para cualquier* $x \in \mathbb{R}$*,* $\boldsymbol{a^x}$ *como*

$$a^x = e^{x \ln(a)}.$$

Ahora queda claro por qué $a > 0$. Veamos que se cumplen "las leyes de los exponentes"

Teorema 4 *Sea* $a > 0$*. Entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

(1) $a^1 = a$.

(2) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$*, para cualesquiera* x, y.

(3) $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$*, para cualesquiera* b, c.

Demostración.

(1) $a^1 = e^{1 \cdot \ln(a)} = e^{\ln(a)} = a$.

(2) $a^{x+y} = e^{(x+y)\ln(a)} = e^{x\ln(a)+y\ln(a)} = e^{x\ln(a)} \cdot e^{y\ln(a)} = a^x \cdot a^y$.

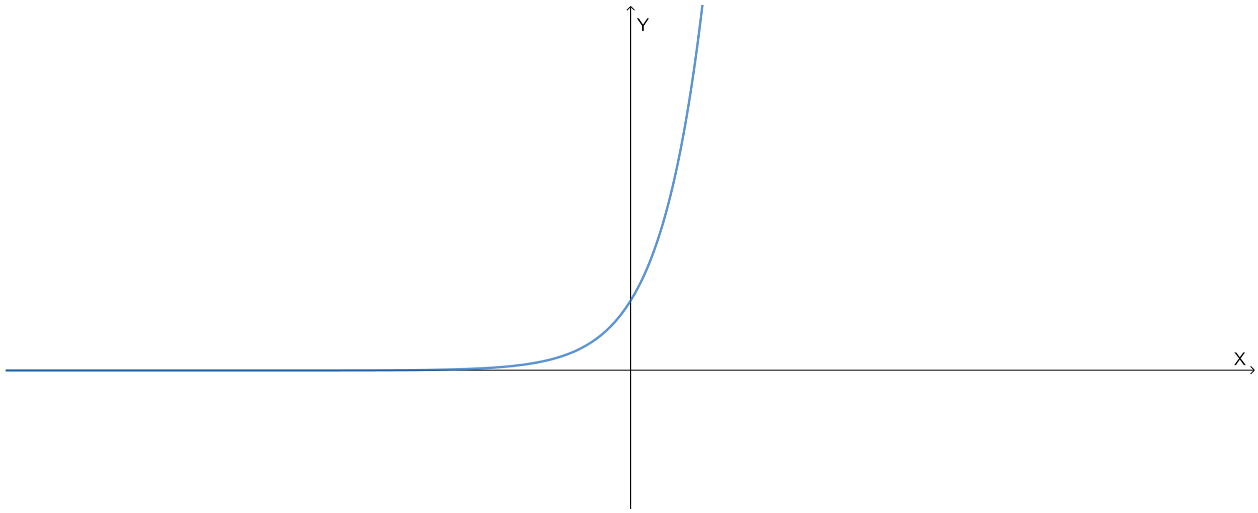
(3) $\left(a^b\right)^c = e^{c\ln\left(a^b\right)} = e^{c\ln\left(e^{b\ln(a)}\right)} = e^{c(b\ln(a))} = e^{cb\ln(a)} = a^{bc}$.

■

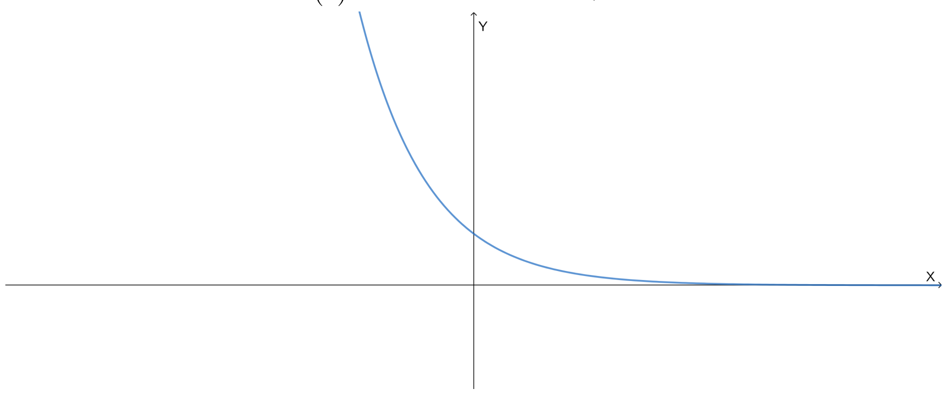
Así como hemos definido a^x por medio de la función e^x, también podemos definir $\log_a$ usando la función $\ln$.

Definición 5 *Sea* $a > 0$*. Definimos, para cualquier* $x > 0$*,* $\log_a(x)$ *como*

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$



(a) Gráfica de a^x con $a > 1$



(b) Gráfica de a^x con $0 < a < 1$

Figura 1

Otra consecuencia de los logros de este capítulo es poder definir x^a con a un número real cualquiera.

Definición 6 *Sea $a \in \mathbb{R}$ Definimos, para cualquier $x > 0$, x^a como*

$$x^a = e^{a \ln(x)}.$$

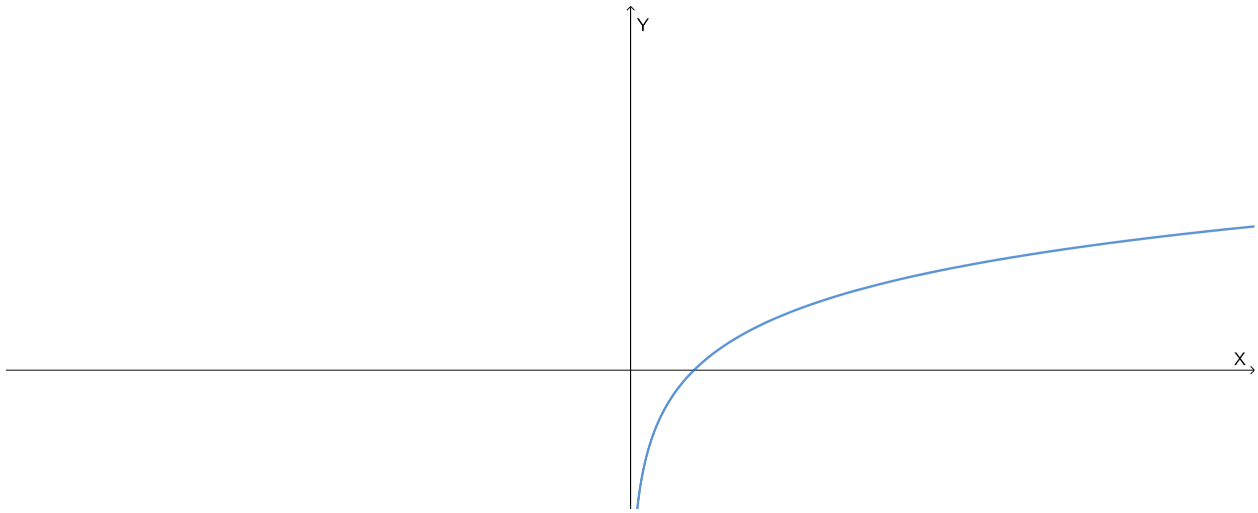
Note que esta definición "extiende" la definición de funciones como x^r con $r \in \mathbb{Q}$. Además, tales funciones son derivables y la derivada es lo que esperabamos.

Teorema 7 *Sean $a \in \mathbb{R}$ y $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como*

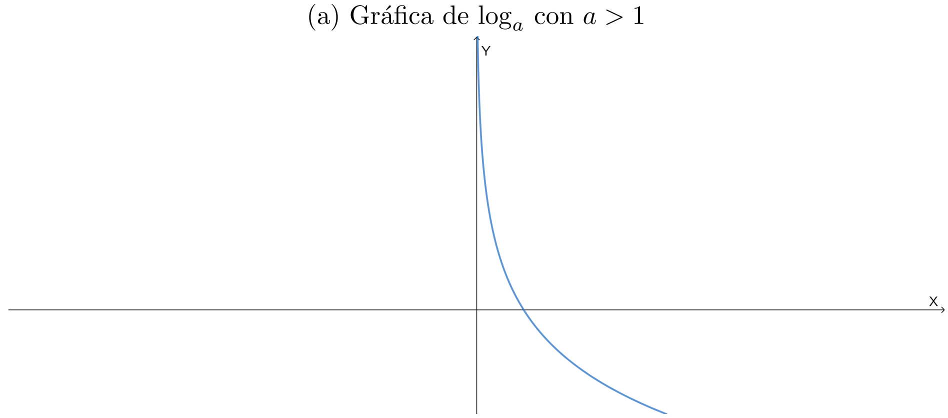
$$f(x) = x^a.$$

Entonces f es derivable y para cada $x \in (0, \infty)$ se tiene que

$$f'(x) = ax^{a-1}.$$



(a) Gráfica de $\log_a$ con $a > 1$



(b) Gráfica de $\log_a$ con $0 < a < 1$

Figura 2

Demostración. Note que f es una composición de funciones derivables, por lo que resulta derivable, además

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^a)' \\ &= \left(e^{a\ln(x)}\right)' \\ &= \frac{a}{x}\left(e^{a\ln(x)}\right) \\ &= \frac{a}{x}\left(x^a\right) \\ &= ax^{a-1}. \end{aligned}$$

■