

Clase 20

En esta ocasión aprovecharemos que ya conocemos a la función exponencial para introducir otras funciones, éstas presentarán muchas similitudes con las funciones trigonométricas.

Funciones Hiperbólicas

Definición 1 Definimos las funciones *seno hiperbólico*, *coseno hiperbólico* y *tangente hiperbólica*, denotadas por \sinh , \cosh y \tanh , respectivamente, como las funciones $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad y \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Teorema 2 Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ se satisfacen las siguientes afirmaciones:

- (1) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.
- (2) $\tanh^2(x) + \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1$.
- (3) $\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \sinh(y) \cosh(x)$.
- (4) $\cosh(x + y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)$.
- (5) $\sinh'(x) = \cosh(x)$.
- (6) $\cosh'(x) = \sinh(x)$.
- (7) $\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$.

Demostración. Solo mostraremos algunos incisos y el resto se quedan como ejercicios.

- (1) Se tiene que

$$\begin{aligned} \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} [(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2] \\ &= \frac{1}{4} [2 + 2] \\ &= 1. \end{aligned}$$

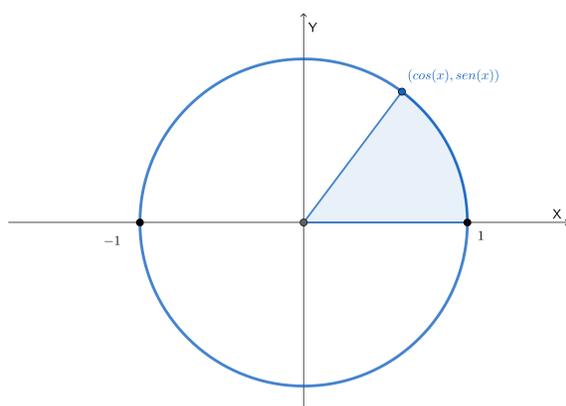
(3) En este inciso conviene desarrollar el lado derecho de la igualdad.

$$\begin{aligned}
 \sinh(x) \cosh(y) + \sinh(y) \cosh(x) &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) + \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left[e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-(x+y)} + \right. \\
 &\quad \left. e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-(x+y)} \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left[2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)} \right] \\
 &= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} \\
 &= \sinh(x+y).
 \end{aligned}$$

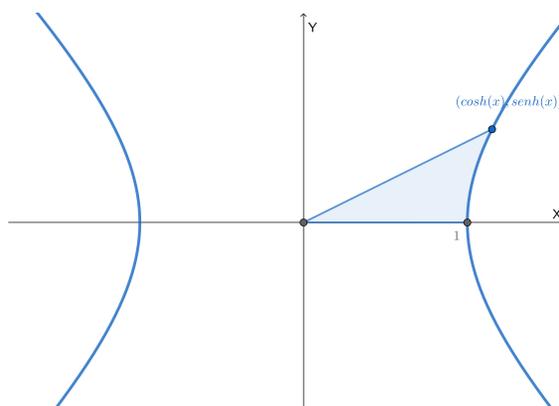
(5) Aunque en el enunciado del teorema no pide demostrar que las funciones hiperbólicas son derivables, es preciso comentar que lo son, pues, por definición, se obtienen a partir de operaciones básicas entre funciones derivables. Ahora,

$$\begin{aligned}
 \sinh'(x) &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' \\
 &= \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})' \\
 &= \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \\
 &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
 &= \cosh(x).
 \end{aligned}$$

■



(a) Se muestra el conjunto $\{(u, v) \mid u^2 + v^2 = 1\}$.



(b) Se muestra el conjunto $\{(u, v) \mid u^2 - v^2 = 1\}$

Figura 1: El punto de coordenadas $(\cos(x), \sin(x))$ determina una sección de la circunferencia de área $\frac{x}{2}$, mientras que el punto de coordenadas $(\cosh(x), \sinh(x))$ determina una región (la sombreada) de la hipérbola de área $\frac{x}{2}$.

Como lo habrán notado en el teorema anterior, las funciones hiperbólicas cumplen propiedades muy similares a las propiedades de las funciones trigonométricas, más aún, el inciso (1), justifica el nombre que se les da a las funciones hipoerbólicas, vea figura 1.

Observación 3 *Note que:*

(1) Dado que $e^y > 0$ para cualquier $y \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\sinh'(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo que el seno hiperbólico es una función creciente en todo su dominio, luego es inyectiva en todo \mathbb{R} . Así, existe la función inversa de \sinh y la denotaremos por \sinh^{-1} .

(2) Se tiene que $\frac{e^x - e^{-x}}{2} > 0$ si y sólo si $e^x - e^{-x} > 0$ y esto ocurre si y sólo si $e^{2x} - 1 > 0$. Luego, $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} > 0$ si y sólo si $x > 0$. Así, $\cosh'(x) = \sinh(x) > 0$ si y sólo si $x > 0$. Por lo tanto, \cosh es creciente en $[0, \infty)$ y de aquí que \cosh sea inyectiva en $[0, \infty)$. A la inversa de la función \cosh en $[0, \infty)$ la denotaremos por \cosh^{-1} .

(3) Dado que $\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que \tanh es inyectiva en \mathbb{R} . Denotaremos por \tanh^{-1} a la función inversa de \tanh .

Teorema 4 *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) $\sinh(\cosh^{-1}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$, para cualquier $x \geq 1$.

(2) $\cosh(\sinh^{-1}(x)) = \sqrt{1 + x^2}$, para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

(3) $(\sinh^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$, para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

(4) $(\cosh^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$, para cualquier $x > 1$.

(5) $(\tanh^{-1})'(x) = \frac{1}{1 - x^2}$, para cualquier $|x| < 1$.

Demostración. De manera similar que en el teorema anterior, solo demostraremos algunos incisos, los demás quedan como tarea.

(1) Del inciso (1) del Teorema 2, se tiene que $|\sinh(y)| = \sqrt{\cosh^2(y) - 1}$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Ahora, dado que $\sinh(y) \geq 0$ si y sólo si $y \geq 0$ (vea inciso (2) de la Observación 3) y $\cosh^{-1}(x) \geq 0$ para toda $x \geq 1$, se tiene que

$$\sinh(\cosh^{-1}(x)) = |\sinh(\cosh^{-1}(x))| = \sqrt{\cosh^2(\cosh^{-1}(x)) - 1}.$$

Pero note que $\cosh^2(\cosh^{-1}(x)) = (\cosh(\cosh^{-1}(x)))^2 = x^2$, por lo que

$$\sinh(\cosh^{-1}(x)) = \sqrt{x^2 - 1},$$

para toda $x \geq 1$.

(3) Dado que $\sinh'(x) = \cosh(x) \neq 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$, por el Teorema de la Función Inversa, se tiene que \sinh^{-1} es derivable en todo \mathbb{R} y, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(\sinh^{-1})'(x) &= \frac{1}{\sinh'(\sinh^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{\cosh(\sinh^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\end{aligned}$$

Note que en la última igualdad hemos usado el inciso (2) de este teorema. ■

Ejemplo 5 Sean $a < b$. Halle

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

Solución. Por el inciso (3) del Teorema 4, sabemos que $(\sinh^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Así, por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene que

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sinh^{-1}(b) - \sinh^{-1}(a). ■$$