

Integración por Cambio de Variable

El siguiente teorema es consecuencia de la regla de la cadena y, probablemente, el más importante de los métodos de integración que veremos. Para facilitar su entendimiento comenzaremos enunciándolo en términos de integrales definidas y posteriormente veremos el tratamiento para integrales indefinidas.

Teorema 1 (Teorema de Cambio de Variable) Sean f, g dos funciones, si existe $(f \circ g)$ y f', g' son continuas, entonces

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f \circ g)g'$$

o

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = \int_a^b (f \circ g)(x)g'(x)dx$$

Demostración. Como f es derivable, consideremos F , una primitiva de f , es decir, $F'(x) = f(x)$ para todo x . Por un lado, al derivar la composición $(F \circ g)$ utilizando la regla de la cadena se tiene que

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x)$$

y utilizando que F es primitiva de f , se sigue que

$$(F \circ g)'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

es decir, $(F \circ g)$ es una primitiva de $f(g(x)) \cdot g'(x)$.

Por otro lado, como F es una primitiva de f , por el 2ºT.F.C., se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} \int_{g(a)}^{g(b)} f &= F(x)|_{g(a)}^{g(b)} \\ &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) \end{aligned}$$

Y como $(F \circ g)$ es una primitiva de $f(g(x)) \cdot g'(x)$, por el 2ºT.F.C., se sigue que

$$\int_a^b (f \circ g)g' = (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a)$$

Por lo tanto

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f \circ g)g'$$

que es lo que se quería demostrar. ■

Para poder aplicar éste teorema necesitamos poder ver la expresión dentro de la integral como una función de la forma $(f \circ g)g'$, para aclararlo, veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2 Halle $\int_a^b \sin^n(x) \cdot \cos(x)dx$

Solución. Lo primero que hay que notar es que $\text{sen}'(x) = \cos(x)$ es una función continua en $\mathbb{R}$, además $\text{sen}^n(x)$ se puede ver como una composición de funciones: sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^n$, entonces $(f \circ \text{sen})(x) = f(\text{sen}(x)) = \text{sen}^n(x)$.

Como además, f' es continua, $f(x)$ y $\text{sen}(x) = g(x)$ cumplen todas las hipótesis del Teorema de Cambio de Variable, por lo tanto, se cumple la siguiente igualdad.

$$\int_{\text{sen}(a)}^{\text{sen}(b)} u^n = \int_a^b \text{sen}^n(x) \cdot \cos(x) dx.$$

Aplicando el segundo teorema fundamental del cálculo al lado izquierdo de la igualdad tenemos que

$$\int_{\text{sen}(a)}^{\text{sen}(b)} u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1} \Big|_{\text{sen}(a)}^{\text{sen}(b)} = \frac{\text{sen}^{(n+1)}(b)}{n+1} - \frac{\text{sen}^{(n+1)}(a)}{n+1}$$

Por lo tanto

$$\int_a^b \text{sen}^n(x) \cdot \cos(x) dx = \frac{\text{sen}^{(n+1)}(b)}{n+1} - \frac{\text{sen}^{(n+1)}(a)}{n+1}$$

■

Observación 3 La igualdad anterior nos permite también encontrar la integral indefinida ya que de ella se sigue que $F(x) = \frac{\text{sen}^{(n+1)}(x)}{n+1}$ es una primitiva de la función $\text{sen}^n(x) \cdot \cos(x)$, de modo que $\forall C \in \mathbb{R}$

$$\int \text{sen}^n(x) \cdot \cos(x) = \frac{\text{sen}^{(n+1)}(x)}{n+1} + C$$

Ejemplo 4 Halle $\int_a^b \text{tg}(x) dx$

Solución. Recordando que $\text{tg}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$ y que $\cos'(x) = -\text{sen}(x)$, y considerando $f(x) = \frac{1}{x}$ $\forall x \neq 0$, podemos construir la siguiente composición: $(f \cdot \cos)(x) = f(\cos(x)) = \frac{1}{\cos(x)}$. De modo que $(f \cdot \cos)(x) \cdot \cos'(x) = \frac{-\text{sen}(x)}{\cos(x)} = -\text{tg}(x)$.

Note que $f(x)$ y $\cos(x)$ cumplen las hipótesis del T.C.V., por lo tanto

$$\int_a^b (f \cdot \cos)(x) \cdot \cos'(x) dx = \int_{\cos(a)}^{\cos(b)} f(u) du.$$

Sustituyendo explícitamente las expresiones se tiene que

$$\int_a^b -\text{tg}(x) dx = \int_{\cos(a)}^{\cos(b)} \frac{1}{u} du$$

por linealidad de la integral podemos «sacar» el signo negativo y despejarlo, además, ya sabemos

integrar el lado derecho, por lo que

$$\begin{aligned}
 \int_a^b tg(x)dx &= - \int_{\cos(a)}^{\cos(b)} \frac{1}{u} du \\
 &= -\ln(u) \Big|_{\cos(a)}^{\cos(b)} \\
 &= -(\ln(\cos(b)) - \ln(\cos(a))) \\
 &= \ln(\cos(a)) - \ln(\cos(b)) \\
 &= \ln\left(\frac{\cos(a)}{\cos(b)}\right)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\int_a^b tg(x)dx = \ln\left(\frac{\cos(a)}{\cos(b)}\right)$. ■

Observación 5 Así como en el ejercicio anterior, la última igualdad, nos permite encontrar la integral indefinida, ya que $-\ln(\cos(x))$ es una primitiva de la función $tg(x)$, de modo que $\forall C \in \mathbb{R}$

$$\int tg(x)dx = -\ln(\cos(x)) + C$$

La relación entre integral definida e indefinida exhibida en estos ejemplos se cumple siempre, por lo que, con el objetivo de reducir los pasos intermedios para llegar al resultado, podemos omitir los límites de integración durante el proceso para obtener la integral indefinida y posteriormente evaluar de manera correcta la composición. Note que al hacer esto, ignorar los límites de integración, no será posible afirmar que se cumple la igualdad entre términos al principio.

Ejemplo 6 Halle $\int_a^b \cos(kx)dx$

Solución. Consideremos primero $\int \cos(kx)dx$. Sea $u(x) = kx$, de modo que $\frac{du}{dx} = k$. Por el teorema de la función inversa se tiene que $\frac{dx}{du} = 1/k$. De modo que podemos escribir el diferencial de x , como $dx = \frac{dx}{du}du = \frac{1}{k}du$, al sustituir, tenemos que

$$\int \cos(kx)dx \longrightarrow \int \cos(u) \frac{1}{k} du = \frac{1}{k} \cdot \int \cos(u)du = \frac{1}{k} \text{sen}(u).$$

Ahora, sustituyendo de regreso $u(x) = kx$ se obtiene: $\frac{\text{sen}(kx)}{k}$, que resulta ser una primitiva de $\cos(kx)$, por lo que

$$\int \cos(kx)dx = \frac{\text{sen}(kx)}{k}$$

Por lo tanto

$$\int_a^b \cos(kx)dx = \frac{\text{sen}(kx)}{k} \Big|_a^b = \frac{\text{sen}(kb) - \text{sen}(ka)}{k}$$

■

Con el ejemplo anterior vemos que trabajar con la integral indefinida reduce bastante el proceso, por lo que en los siguientes ejemplos nos concentraremos en encontrar solamente primitivas.

Ejemplo 7 Halle $\int \frac{1}{x \cdot \ln(x)} dx$

Solución. Notemos que al hacer la sustitución considerando el teorema de la función inversa es equivalente a poder escribir du , la diferencial de u , en términos de x (o viceversa), y al hacerlo se simplifica aún más el procedimiento.

Sea $u(x) = \ln(x)$, entonces $du = d(\ln(x))dx = \frac{1}{x}dx$. Sustituyendo tenemos lo siguiente

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln(x)} dx \longrightarrow \int \frac{1}{u} du = \ln(u)$$

Regresando a la variable original, tenemos que $\ln(\ln(x))$ es una primitiva de $\frac{1}{x \cdot \ln(x)} dx$. Por lo tanto, $\forall C \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln(x)} dx = \ln(\ln(x)) + C$$

■

Ejemplo 8 Halle $\int \cos(x) \cdot e^{\sin(x)} dx$

Solución. Sea $u(x) = \sin(x)$ de modo que $du = \cos(x)dx$, sustituyendo tenemos que

$$\int \cos(x) \cdot e^{\sin(x)} dx \longrightarrow \int e^u du = e^u.$$

Por lo tanto

$$\int \cos(x) \cdot e^{\sin(x)} dx = e^{\sin(x)} + C$$

■

Ejemplo 9 Halle $\int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx$

Solución. Antes de aplicar alguna sustitución nos conviene «trabajar» un poco el integrando. Consideremos lo siguiente

$$\frac{1+e^x}{1-e^x} = \frac{1+e^x+0}{1-e^x} = \frac{1+e^x+(e^x-e^x)}{1-e^x} = \frac{1-e^x+2e^x}{1-e^x} = \frac{1-e^x}{1-e^x} + \frac{2e^x}{1-e^x} = 1 + \frac{2e^x}{1-e^x}$$

De modo que

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx = \int 1 + \frac{2e^x}{1-e^x} dx = \int 1 dx + \int \frac{2e^x}{1-e^x} dx = x + 2 \int \frac{e^x}{1-e^x} dx$$

Para resolver $\int \frac{e^x}{1-e^x} dx$ consideremos $u(x) = 1 - e^x$ de modo que $du = -e^x dx$. Sustituyendo tenemos

$$\int \frac{e^x}{1-e^x} dx \longrightarrow \int \frac{-du}{u} = -\ln(u)$$

por lo que

$$\int \frac{e^x}{1-e^x} dx = -\ln(1-e^x)$$

Finalmente, para toda $C \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx = x - 2\ln(1-e^x) + C$$

■

Ejemplo 10 Halle $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx$

Solución. Sea $u(x) = \sqrt{e^x+1}$, de modo que $u^2 = e^x + 1$, entonces $x = \ln(u^2 - 1)$, $dx = \frac{2u}{u^2 - 1} du$ y $e^{2x} = (u^2 - 1)^2$. Sustituyendo se tiene lo siguiente

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx \longrightarrow \int \frac{(u^2 - 1)^2}{u} \cdot \frac{2u}{u^2 - 1} du = 2 \int (u^2 - 1) du = 2 \int u^2 du - 2 \int du = 2 \frac{u^3}{3} - 2u$$

Por lo tanto

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx = \frac{2}{3}(\sqrt{e^x+1})^3 - 2\sqrt{e^x+1} + C$$

■