

# Integración de funciones trigonométricas y por sustitución trigonométrica

**Teorema 1 (Integración por partes)** Sea  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , funciones tales que  $f'$  y  $g'$  son continuas en  $[a, b]$ , entonces

$$\int f g' = f g - \int f' g$$

**Teorema 2 (Teorema de Cambio de Variable o Método de Sustitución)** Sean  $f, g$  dos funciones, si existe  $(f \circ g)$  y  $f', g'$  son continuas, entonces

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du = \int_a^b (f \circ g)(x) g'(x) dx$$

Veamos un ejemplo donde sea necesario aplicar ambos métodos para llegar a la solución.

**Ejemplo 3** Encuentre  $\int \arctan(x) dx$ .

**Solución.** Primero apliquemos el método de integración por partes. Considerando  $f(x) = \arctan(x)$  de modo que  $\frac{df}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$  y  $\frac{dg}{dx} = 1$  de modo que  $g(x) = x$ . Se tiene que

$$\int \arctan(x) dx = x \cdot \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

Para resolver  $\int \frac{x}{1+x^2} dx$  utilicemos el teorema de cambio de variable: Sea  $u = 1+x^2$  de modo que  $du = 2x dx$ , entonces  $\frac{du}{2} = x dx$ . Sustituyendo tenemos que

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx \rightarrow \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln(u).$$

Por lo que  $\forall C \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

Por lo tanto

$$\int \arctan(x) dx = x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

■

Como se ha visto en los ejemplos, en general no hay una regla clara que nos indique el cambio de variable adecuado para llevar a cabo la integración, por lo que vale la pena estudiar aquellos que son recurrentes.

## Integración de funciones trigonométricas

Estudiaremos 4 situaciones que involucran a las funciones seno y coseno.

1. Para integrar expresiones de la forma  $\operatorname{sen}^n(x)$ ,  $\cos^n(x)$ , con  $n$  par:

De la fórmula para el coseno de un ángulo doble se tiene que  $\cos(2x) = \cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)$ , además,  $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$ . Entonces

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1 \\ \cos(2x) &= (1 - \operatorname{sen}^2(x)) - \operatorname{sen}^2(x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(x)\end{aligned}$$

Despejando, se tienen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2(x) &= \frac{1 - \cos(2x)}{2} \\ \cos^2(x) &= \frac{1 + \cos(2x)}{2}\end{aligned}$$

Que podemos utilizar para llevar a cabo la integración, ya que, como  $n$  es par,  $n = 2k$ , para algún  $k \in \mathbb{N}$  de modo que podemos escribir  $\operatorname{sen}^n(x) = \operatorname{sen}^{2k}(x) = (\operatorname{sen}^2(x))^k$  y  $\cos^n(x) = \cos^{2k}(x) = (\cos^2(x))^k$  y utilizar las identidades para sustituir  $\operatorname{sen}^2(x)$  o  $\cos^2(x)$ , según sea el caso.

**Ejemplo 4** Encuentre  $\int \operatorname{sen}^4(x)dx$ .

**Solución.** Utilizando las identidades anteriores, podemos reescribir la expresión de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4(x)dx &= \int (\operatorname{sen}^2(x))^2dx = \int \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2}\right)^2 dx \\ &= \int \frac{1}{4}(1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x))dx \\ &= \frac{1}{4}\left(\int dx - 2 \int \cos(2x)dx + \int \cos^2(2x)dx\right)\end{aligned}$$

Aplicando ahora la identidad para  $\cos^2(x)$  en la última integral y resolviendo se tiene que

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4(x)dx &= \frac{1}{4}\left(\int dx - 2 \int \cos(2x)dx + \int \frac{1 + \cos(4x)}{2}dx\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(x - 2\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2} + \frac{1}{2}\left(\int dx + \int \cos(4x)dx\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(x - \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{\operatorname{sen}(4x)}{4}\right)\right) + C \\ &= \frac{1}{4}\left(x - \operatorname{sen}(2x) + \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(4x)}{8}\right) + C \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{3x}{2} - \operatorname{sen}(2x) + \frac{\operatorname{sen}(4x)}{8}\right) + C \\ &= \frac{3x}{8} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + \frac{\operatorname{sen}(4x)}{32} + C\end{aligned}$$

■

2. Para integrar expresiones de la forma  $\text{sen}^n(x)$ ,  $\cos^n(x)$ , con  $n$  impar:

Como  $n$  es impar, se tiene que  $n = 2k + 1$ , para algún  $k \in \mathbb{N}$ . De modo que podemos escribir el integrando como

$$\text{sen}^n(x) = \text{sen}^{(2k+1)}(x) = \text{sen}^{2k}(x) \cdot \text{sen}(x)$$

o

$$\cos^n(x) = \cos^{(2k+1)}(x) = \cos^{2k}(x) \cdot \cos(x)$$

Y sustituir  $\text{sen}^2(x)$  por  $(1 - \cos^2(x))$  o  $\cos^2(x)$  por  $(1 - \text{sen}^2(x))$ , según sea el caso.

**Ejemplo 5** Encuentra  $\int \text{sen}^3(x)dx$ .

**Solución.** Apliquemos el procedimiento indicado.

$$\begin{aligned} \int \text{sen}^3(x)dx &= \int \text{sen}(x) \cdot \text{sen}^2(x)dx = \int \text{sen}(x) \cdot (1 - \cos^2(x))dx \\ &= \int \text{sen}(x)dx - \int \text{sen}(x)\cos^2(x)dx \\ &= -\cos(x) - \int \text{sen}(x)\cos^2(x)dx \end{aligned}$$

Para resolver  $\int \text{sen}(x)\cos^2(x)dx$  podemos considerar el siguiente cambio de variable: Sea

$u = \cos(x)$  de modo que  $du = -\text{sen}(x)dx$ . Entonces  $\int \text{sen}(x)\cos^2(x)dx = -\frac{\cos^3(x)}{3}$ . Por lo tanto

$$\int \text{sen}^3(x)dx = -\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3} + C.$$

■

3. Para integrar expresiones de la forma  $\text{sen}^n(x) \cdot \cos^m(x)$ , con  $n$  o  $m$  impar:

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $n$  es impar, de modo que  $n = 2k + 1$ , para algún  $k \in \mathbb{N}$ . Entonces conviene proceder de la misma manera que en la situación anterior.

**Ejemplo 6** Encuentra  $\int \text{sen}^2(x) \cdot \cos^3(x)dx$ .

**Solución.** Reescribiendo  $\cos^3(x) = \cos(x) \cdot \cos^2(x) = \cos(x) \cdot (1 - \text{sen}^2(x))$  tenemos que.

$$\int \text{sen}^2(x) \cdot \cos^3(x)dx = \int \text{sen}^2(x) \cdot \cos(x) \cdot (1 - \text{sen}^2(x))dx$$

Resolviendo el producto y utilizando la linealidad de la integral se sigue que

$$\int \text{sen}^2(x) \cdot \cos^3(x)dx = \int \text{sen}^2(x) \cdot \cos(x)dx - \int \text{sen}^4(x) \cdot \cos(x)dx$$

Las dos integrales a la derecha se pueden resolver con la misma sustitución,  $u = \text{sen}(x)$  de modo que  $du = \cos(x)dx$ . Por lo tanto

$$\int \text{sen}^2(x) \cdot \cos^3(x)dx = \frac{\text{sen}^3(x)}{3} - \frac{\text{sen}^5(x)}{5} + C.$$

■

4. Para integrar expresiones de la forma  $\text{sen}^n(x) \cdot \cos^m(x)$ , con  $n$  y  $m$  par:

Como  $n$  y  $m$  son pares se sigue que  $n = 2k$  y  $m = 2l$ , para algunos  $k, l$  en  $\mathbb{N}$ , de modo que

$$\text{sen}^n(x) \cdot \cos^m(x) = (\text{sen}^2(x))^k \cdot (\cos^2(x))^l$$

Entonces conviene sustituir ambos por las identidades de la primer situación y desarrollar.

**Ejemplo 7** Encuentre  $\int \text{sen}^2(x) \cdot \cos^2(x) dx$ .

**Solución.**

$$\begin{aligned} \int \text{sen}^2(x) \cdot \cos^2(x) dx &= \int \left( \frac{1 - \cos(2x)}{2} \right) \left( \frac{1 + \cos(2x)}{2} \right) dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2(2x)) dx \\ &= \frac{1}{4} \left( \int dx - \int \cos^2(2x) dx \right) \\ &= \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos(4x)}{2} dx \\ &= \frac{x}{4} - \frac{1}{8} \left( \int dx + \int \cos(4x) dx \right) \\ &= \frac{x}{4} - \frac{x}{8} - \frac{1}{8} \frac{\text{sen}(4x)}{4} + C \\ &= \frac{x}{8} - \frac{1}{32} \text{sen}(4x) + C \end{aligned}$$

■

### Sustitución trigonométrica

Ahora, estudiaremos un tipo de sustitución que es muy útil cuando podemos asociar el integrando con un triángulo rectángulo a través del teorema de Pitágoras.

**Ejemplo 8** Halle  $I_1 = \int \sqrt{1 - t^2} dt$

**Solución.** Pensemos en el triángulo rectángulo que tiene hipotenusa  $c = 1$  y uno de sus catetos es  $a = t$ , de modo que, por el teorema de Pitágoras, podemos escribir el otro cateto como  $b = \sqrt{1 - t^2}$ . Entonces, en ese triángulo se cumplen las siguientes identidades trigonométricas: Para  $\theta$ , el ángulo formado entre  $c$  y  $a$  se tiene que  $\text{sen}(\theta) = \frac{\sqrt{1 - t^2}}{1} = \sqrt{1 - t^2}$ . Y  $\cos(\theta) = \frac{t}{1} = t$ , de modo que  $dt = -\text{sen}(\theta) d\theta$ . Sustituyendo tenemos lo siguiente

$$I_1 \longrightarrow \int \text{sen}(\theta) \cdot (-\text{sen}(\theta)) d\theta = - \int \text{sen}^2(\theta) d\theta = - \int \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta = -\frac{1}{2} \left( \theta - \frac{\text{sen}(2\theta)}{2} \right) + C$$

Utilizando que  $\text{sen}(2\theta) = 2\text{sen}(\theta) \cdot \cos(\theta)$  se tiene

$$\int \text{sen}(\theta) \cdot (-\text{sen}(\theta)) d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{2\text{sen}(\theta) \cdot \cos(\theta)}{4} + C$$

Por lo tanto, regresando a la variable  $t$  se tiene

$$I_1 = -\frac{\arccos(t)}{2} + \frac{t\sqrt{1 - t^2}}{2} + C$$

■

**Ejemplo 9** Halle  $I_2 = \int x^2 \sqrt{4-x^2} dx$

**Solución.** Pensemos en el triángulo rectángulo que tiene hipotenusa  $c = 2$  y uno de los catetos  $a = x$ , de este modo el otro cateto mide  $b = \sqrt{4-x^2}$ . Y para  $t$ , el ángulo formado por  $c$  y  $a$  se cumplen las siguientes relaciones trigonométricas:  $\text{sen}(t) = \frac{x}{2}$ , de modo que  $dx = 2\cos(t)dt$ ,  $\cos(t) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$  y  $tg(t) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ . sustituyendo tenemos que

$$I_2 \longrightarrow \int (4\text{sen}^2(t)) \cdot (2\cos(t)) \cdot (2\cos(t))dt = 16 \int \text{sen}^2(t) \cdot \cos^2(t)dt$$

Note que obtuvimos una de las integrales que ya resolvimos, por lo que podemos sustituir el resultado.

$$16 \int \text{sen}^2(t) \cdot \cos^2(t)dt = 16 \left( \frac{t}{8} - \frac{\text{sen}(4t)}{32} + C_1 \right) = 2t - \frac{\text{sen}(4t)}{2} + C$$

Para regresar a la variable original consideremos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}\text{sen}(2x) &= 2\text{sen}(x)\cos(x) \\ \cos(2x) &= \cos^2(x) - \text{sen}^2(x)\end{aligned}$$

Se tiene que

$$\frac{\text{sen}(4t)}{2} = \text{sen}(2t) \cdot \cos(2t) = 2\text{sen}(t) \cdot \cos(t) \cdot (\cos^2(x) - \text{sen}^2(x)).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}I_2 &= 2 \arcsen\left(\frac{x}{2}\right) - 2\frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \cdot \left(\frac{4-x^2}{4} - \frac{x^2}{4}\right) + C \\ &= 2 \arcsen\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{8}x \cdot \sqrt{4-x^2} \cdot (4-2x^2) + C \\ &= 2 \arcsen\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{8}\sqrt{4-x^2} \cdot (4x-2x^3) + C\end{aligned}$$

■

$$x = a \tag{1}$$

$$x = a$$