

## Clase 32

Como cada sesión, iniciamos recordando algunas definiciones y resultados útiles para la sesión de hoy:

**Definición 1** Sean  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c \in (a, b)$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $f$  es  $n$ -veces derivable en  $c$ , definimos **el polinomio de Taylor** de grado  $n$  de  $f$  en  $c$ , denotado por  $p_{n,f,c}(x)$ , como

$$p_{n,f,c}(x) = f(c) + \frac{f^{(1)}(c)}{1!}(x-c) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

**Teorema 2** Sean  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c \in (a, b)$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $f$  es  $n$ -veces derivable en  $c$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - p_{n,f,c}(x)}{(x-c)^n} = 0.$$

**Definición 3** Sean  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones y  $c \in (a, b)$ . Diremos que  $f$  y  $g$  son **iguales hasta el orden  $n$  en  $c$**  si

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - g(x)}{(x-c)^n} = 0.$$

¿Recuerda el “criterio de las caritas”? Es el criterio que establece que si en un punto crítico de una función  $f$  la segunda derivada es positiva, entonces  $f$  tiene un mínimo local en dicho punto crítico y si la segunda derivada es negativa, entonces  $f$  tiene un máximo local en dicho punto crítico. Por supuesto este criterio no siempre es útil, por ejemplo en la función  $f(x) = x^4$  se tiene que  $x = 0$  es un punto crítico de  $f$ , más aún, es un mínimo local (de hecho es un mínimo global), pero esto no lo podemos concluir con este criterio pues  $f'(0) = f''(0) = 0$ . El Teorema 2 nos permite mejorar este criterio.

## Caritas recargadas y *unicidad* de los polinomios de Taylor

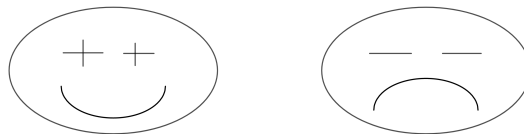


Figura 1: Una nemotecnia para recordar el criterio de la segunda derivada para hallar máximos y/o mínimos locales.

**Teorema 4** Sean  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  y  $c \in (a, b)$  tales que

$$f'(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0 \quad \text{y} \quad f^{(n)}(c) \neq 0.$$

(1) Si  $n$  es par y  $f^{(n)}(c) > 0$ , entonces  $f$  tiene un mínimo local en  $c$ .

(2) Si  $n$  es par y  $f^{(n)}(c) < 0$ , entonces  $f$  tiene un máximo local en  $c$ .

(3) Si  $n$  es impar, entonces  $f$  no tiene ni un mínimo local ni un máximo local en  $c$ .

**Demostración.** Consideremos la función  $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x) = f(x) - f(c)$ . Note que  $g^{(k)}(c) = f^{(k)}(c) = 0$  para toda  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  y  $g^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) \neq 0$ . Luego,

$$p_{n,g,c}(x) = g(c) + \frac{g'(c)}{1!}(x-c) + \dots + \frac{g^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = \frac{g^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Así, por el Teorema 2, tenemos que

$$0 = \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x) - p_{n,g,c}(x)}{(x-c)^n} = \lim_{x \rightarrow c} \left[ \frac{g(x)}{(x-c)^n} - \frac{g^{(n)}(c)}{n!} \right].$$

Y de aquí que

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{(x-c)^n} = \frac{g^{(n)}(c)}{n!}. \quad (1)$$

- (1) Supongamos que  $n$  es par y  $g^{(n)}(c) > 0$ . Como  $g^{(n)}(c) > 0$ , entonces  $g^{(n)}(c)/n! > 0$ , por lo que, de la igualdad (1), se sigue que existe  $\delta > 0$  tal que  $(c-\delta, c+\delta) \subseteq (a, b)$  y para todo  $x \in (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$  se tiene que

$$\frac{g(x)}{(x-c)^n} > 0.$$

Ahora, como  $n$  es par, tenemos que  $(x-c)^n > 0$  para todo  $x \in (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$  por lo que  $g(x) > 0$  para todo  $x \in (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$ , es decir,

$$f(x) > f(c),$$

para todo  $x \in (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$ . Esto es,  $f$  tiene un mínimo local en  $c$ .

- (2) Supongamos que  $n$  es par y  $g^{(n)}(c) < 0$ . En este caso se tiene que  $g^{(n)}(c)/n! < 0$ , por lo que, de la igualdad (1), se sigue que existe  $\delta > 0$  tal que  $(c-\delta, c+\delta) \subseteq (a, b)$  y para todo  $x \in (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$  se tiene que

$$\frac{g(x)}{(x-c)^n} < 0.$$

Ahora, como  $n$  es par, tenemos que  $(x-c)^n > 0$  para todo  $x \in (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$  por lo que  $g(x) < 0$  para todo  $x \in (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$ , es decir,

$$f(x) < f(c),$$

para todo  $x \in (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$ . Esto es,  $f$  tiene un máximo local en  $c$ .

- (3) Supongamos ahora que  $n$  es impar. Si  $g^{(n)}(c) < 0$ , entonces  $g^{(n)}(c)/n! < 0$ , por lo que, de la igualdad (1), se tiene que existe  $\delta > 0$  tal que  $(c-\delta, c+\delta) \subseteq (a, b)$  y para todo  $x \in (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$  se tiene que

$$\frac{g(x)}{(x-c)^n} < 0.$$

Note que  $(x-c)^n > 0$  para todo  $x \in (c, c+\delta)$  por lo que  $g(x) < 0$  para todo  $x \in (c, c+\delta)$ , es decir,

$$f(x) < f(c),$$

para todo  $x \in (c, c+\delta)$ . Ahora, como  $n$  es impar, tenemos que  $(x-c)^n < 0$  para todo  $x \in (c-\delta, c)$  por lo que  $g(x) > 0$  para todo  $x \in (c-\delta, c)$ , es decir,

$$f(x) > f(c),$$

para todo  $x \in (c-\delta, c)$ . Así,  $f$  no tiene ni un máximo ni un mínimo local en  $c$ . Finalmente, note que si  $g^{(n)}(c) > 0$  el resultado se obtiene de manera similar. ■

**Ejemplo 5** Demuestre que la función  $f(x) = x^4$  tiene un mínimo local en 0.

**Solución.** Note  $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$  y  $f^{(4)}(0) = 24$ . Así, por el inciso (1) del Teorema 4, tenemos que  $f$  tiene un mínimo local en 0. ■

**Lema 6** Sean  $g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $c \in (a, b)$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Si

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{(x-c)^n} = 0,$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{(x-c)^i} = 0,$$

para todo  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ .

**Demostración.** Note que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{(x-c)^i} &= \lim_{x \rightarrow c} \left[ \frac{g(x)}{(x-c)^i} \cdot \frac{(x-c)^{n-i}}{(x-c)^{n-i}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \left[ \frac{g(x)}{(x-c)^n} \cdot (x-c)^{n-i} \right] \\ &= \left[ \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{(x-c)^n} \right] \cdot \left[ \lim_{x \rightarrow c} (x-c)^{n-i} \right] \\ &= 0 \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

**Teorema 7** Sean  $p(x) = a_0 + a_1(x-c) + \dots + a_n(x-c)^n$  y  $q(x) = b_0 + b_1(x-c) + \dots + b_n(x-c)^n$  dos funciones polinomiales iguales hasta el orden  $n$  en  $c$ . Entonces  $p = q$ .

**Demostración.** Consideremos la función polinomial  $r = p - q$ , esto es,

$$r(x) = c_0 + c_1(x-c) + \dots + c_n(x-c)^n$$

donde  $c_k = a_k - b_k$  para cada  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Como  $p$  y  $q$  son iguales hasta el orden  $n$  en  $c$ , entonces

$$0 = \lim_{x \rightarrow c} \frac{p(x) - q(x)}{(x-c)^n} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{r(x)}{(x-c)^n}.$$

Note que  $r$  satisface las hipótesis del Lema 6 así que aplicando dicho lema, para  $i = 0$ , tenemos que

$$0 = \lim_{x \rightarrow c} \frac{r(x)}{(x-c)^0} = \lim_{x \rightarrow c} r(x) = \lim_{x \rightarrow c} c_0 + c_1(x-c) + \cdots + c_n(x-c)^n = c_0,$$

es decir,  $c_0 = 0$ . Se sigue que  $r(x) = c_1(x-c) + \cdots + c_n(x-c)^n$ . Luego, aplicando el Lema 6 para  $i = 1$ , tenemos que

$$0 = \lim_{x \rightarrow c} \frac{r(x)}{(x-c)^1} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{c_1(x-c) + \cdots + c_n(x-c)^n}{x-c} = \lim_{x \rightarrow c} c_1 + c_2(x-c) + \cdots + c_n(x-c)^{n-1} = c_1.$$

De donde  $c_1 = 0$ . Continuando de esta manera, tenemos que  $c_0 = c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ , es decir  $a_k = b_k$  para toda  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , de donde  $p = q$ . ■

Como consecuencia de este teorema obtenemos una propiedad de los polinomios de Taylor, un tipo de unicidad.

**Corolario 8** Sean  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c \in (a, b)$  y  $n \in \mathbb{N}$  tales que existe  $p_{n,f,c}$ . Si  $p(x) = a_0 + a_1(x-c) + \cdots + a_n(x-c)^n$  es una función polinomial igual a  $f$  hasta el orden  $n$  en  $c$ , entonces

$$p = p_{n,f,c}.$$

**Demostración.** Note que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} \frac{p(x) - p_{n,f,c}(x)}{(x-c)^n} &= \lim_{x \rightarrow c} \left[ \frac{p(x) - f(x)}{(x-c)^n} + \frac{f(x) - p_{n,f,c}(x)}{(x-c)^n} \right] \\ &= \left[ \lim_{x \rightarrow c} \frac{p(x) - f(x)}{(x-c)^n} \right] + \left[ \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - p_{n,f,c}(x)}{(x-c)^n} \right] \\ &= 0 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Es decir,  $p$  y  $p_{n,f,c}$  son iguales hasta el orden  $n$  en  $c$ . Así, del Teorema 7, se sigue que  $p = p_{n,f,c}$ . ■