

Clase 33

En esta ocasión conviene recordar una definición y un resultado vistos antes:

Definición 1 Sean $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$ y $n \in \mathbb{N}$. Si f es n -veces derivable en c , definimos el **polinomio de Taylor** de grado n de f en c , denotado por $p_{n,f,c}(x)$, como

$$p_{n,f,c}(x) = f(c) + \frac{f^{(1)}(c)}{1!}(x-c) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Corolario 2 Sean $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que existe $p_{n,f,c}$. Si $p(x) = a_0 + a_1(x-c) + \cdots + a_n(x-c)^n$ es una función polinomial igual a f hasta el orden n en c , entonces

$$p = p_{n,f,c}.$$

Dada una función y su polinomio de Taylor, de cierto grado y en cierto punto, ¿qué tanto se “pareceran” alrededor de dicho punto? Esta diferencia resultará importante, por lo que tiene nombre, el título de esta clase.

El Resto

El Corolario 2 puede ser usado para calcular algunos polinomios de Taylor.

Ejemplo 3 Halle el polinomio de Taylor de grado $2n+1$ de la función $\arctan(x)$ en 0.

Solución. Igual que en los primeros ejemplos, uno intenta deducir una expresión para la k -ésima derivada, veamos qué tal nos va. Se tiene que

$$\begin{aligned}\arctan'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\ \arctan''(x) &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \\ \arctan'''(x) &= \frac{-2(1+x^2)^2 + 8x(1+x^2)}{(1+x^2)^4}\end{aligned}$$

y desde este último calculo podemos notar que este no es precisamente el mejor camino para hallar $p_{2n+1,\arctan,0}$. Pensemos de otra manera entonces. Por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Por otro lado, como

$$(1+t^2) \left(1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2} \right) = 1,$$

entonces

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

Y de aquí que

$$\begin{aligned}
\arctan(x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \\
&= \int_0^x \left(1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2} \right) dt \\
&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt.
\end{aligned}$$

Ahora, note que

$$\left| (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right| \leq \left| \int_0^x t^{2n+2} dt \right| = \left| \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \right|,$$

por lo que

$$\left| \frac{\arctan(x) - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right)}{x^{2n+1}} \right| \leq \left| \frac{x^2}{2n+3} \right|.$$

Y de aquí que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x) - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right)}{x^{2n+1}} = 0.$$

Luego, por el Corolario 2, tenemos que

$$p_{2n+1, \arctan, 0}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

■

En el ejemplo anterior podemos notar que

$$|\arctan(x) - p_{2n+1, \arctan, 0}(x)| = \left| (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right| \leq \left| \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \right|,$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Ahora, si consideramos $x \in \mathbb{R}$ con $|x| \leq 1$, tenemos que

$$|\arctan(x) - p_{2n+1, \arctan, 0}(x)| \leq \left| \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \right| \leq \frac{1}{2n+3}.$$

Por lo tanto, para $x \in \mathbb{R}$, con $|x| \leq 1$, podemos usar el polinomio de Taylor de grado $2n+1$, con $n \in \mathbb{N}$ adecuado, para aproximar el valor de $\arctan(x)$ con un “error” tan pequeño como queramos.

Definición 4 Sean $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $p_{n, f, c}$ existe. Definimos **el resto de grado n de f en c** , denotado por $R_{n, f, c}(x)$, como la función $R_{n, f, c} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$R_{n, f, c}(x) = f(x) - p_{n, f, c}(x).$$

Observación 5 *Note que, mientras los polinomios de Taylor están definidos en todo $\mathbb{R}$, los restos tienen como dominio el dominio de f .*

Con esta nueva terminología tenemos que

$$R_{2n+1, \arctan, 0}(x) = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$$

Y gracias a esta expresión pudimos notar que para $x \in \mathbb{R}$, con $|x| \leq 1$, podemos aproximar el valor de $\arctan(x)$ tanto como queramos. La pregunta natural es si es posible escribir cualquier resto de esta manera, la respuesta la proporciona el siguiente Teorema.

Teorema 6 (Forma integral del resto) *Sean $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$ y $n \in \mathbb{N}$. Si para $x \in (c, b)$ existe $f^{(n+1)}$ en $[c, x]$ y es continua en $[c, x]$, entonces*

$$R_{n,f,c}(x) = \int_c^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt.$$

Demostración. Usaremos inducción matemática sobre n para demostrar esta afirmación.

Consideremos una función $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$ y $x \in (c, b)$ de tal manera que existe f'' en $[c, x]$ y que además es continua en $[c, x]$.

Por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo tenemos que

$$f(x) - f(c) = \int_c^x f'(t) dt. \quad (1)$$

Ahora, utilizando el Teorema de Integración por Partes de la siguiente manera: $u(t) = f'(t)$, $v'(t) = 1$, $u'(t) = f''(t)$ y considerando función $v(t) = t - x$ (note que aquí x es una constante). Tenemos que

$$\begin{aligned} \int_c^x f'(t) dt &= u(t)v(t) \Big|_c^x - \int_c^x u'(t)v(t) dt \\ &= u(x)v(x) - u(c)v(c) - \int_c^x f''(t)(t-x) dt \\ &= -f'(c)(c-x) + \int_c^x f''(t)(x-t) dt \\ &= f'(c)(x-c) + \int_c^x f''(t)(x-t) dt. \end{aligned}$$

Así que, sustituyendo en la ecuación (1), tenemos que

$$f(x) - f(c) = f'(c)(x-c) + \int_c^x f''(t)(x-t) dt,$$

es decir que

$$f(x) - [f(c) - f'(c)(x - c)] = \int_c^x f''(t)(x - t) dt.$$

Esto es,

$$R_{1,f,c}(x) = \int_c^x f''(t)(x - t) dt.$$

Lo que demuestra nuestra base de inducción.

Supongamos ahora que para cualquier función $g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que existe $g^{(n)}$ en $[c, x]$ y es continua en $[c, x]$, se tiene que

$$R_{n-1,g,c}(x) = \int_c^x \frac{g^{(n)}(t)}{(n-1)!} (x - t)^{n-1} dt$$

y sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que existe $f^{(n+1)}$ en $[c, x]$ y que es continua en $[c, x]$. Como existe $f^{(n+1)}$ en $[c, x]$, entonces existe $f^{(n)}$ en $[c, x]$ y además es continua, por lo que usando la hipótesis de inducción tenemos que

$$R_{n-1,f,c}(x) = \int_c^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} (x - t)^{n-1} dt.$$

Ahora, usando el Teorema de Integración por Partes, de la siguiente manera: $u(t) = f^{(n)}(t)$, $v'(t) = \frac{(x - t)^{n-1}}{(n-1)!}$, $u'(t) = f^{(n+1)}(t)$ y $v(t) = -\frac{(x - t)^n}{n!}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} R_{n-1,f,c}(x) &= \int_c^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} (x - t)^{n-1} dt. \\ &= u(t)v(t) \Big|_c^x - \int_c^x u'(t)v(t) dt \\ &= \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n + \int_c^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n dt. \end{aligned}$$

Y como $R_{n-1,f,c}(x) = f(x) - p_{n-1,f,c}(x)$, entonces

$$f(x) - \left[p_{n-1,f,c}(x) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n \right] = \int_c^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n dt.$$

Es decir,

$$f(x) - p_{n,f,c}(x) = \int_c^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n dt.$$

De donde

$$R_{n,f,c}(x) = \int_c^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt.$$

Con lo que terminamos nuestra demostración. ■