

## Clase 41

La sesión anterior, entre otras cosas vimos lo siguiente:

**Definición 1** Sea  $\{a_n\}$  una sucesión. Definimos **la sucesión de sumas parciales de  $\{a_n\}$**  como la sucesión  $\{s_n\} = \{a_1 + \cdots + a_n\}$ . Diremos que la sucesión  $\{a_n\}$  es **sumable** si la sucesión de sumas parciales converge, es decir, si existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ . En este caso, denotamos a dicho límite por el

símbolo  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , es decir  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ .

**Teorema 2 (Condición del Resto)** Sea  $\{a_n\}$  una sucesión. Si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**Ejemplo 3 (La serie geométrica)** La serie  $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$  converge si  $|r| < 1$  y diverge si  $|r| \geq 1$ .

En esta ocasión aprovecharemos nuestros conocimientos de sucesiones para obtener criterios de convergencia para series.

## Algunos Criterios de Convergencia para Series

**Proposición 4** Sea  $\{a_n\}$  una sucesión de términos no negativos, es decir,  $a_n \geq 0$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Se tiene que la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge si y sólo si la sucesión  $\{s_n\}$  de sumas parciales de  $\{a_n\}$  es acotada superiormente.

**Demostración.**  $\Rightarrow$  Si la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  es convergente, entonces la sucesión de sumas parciales  $\{s_n\}$  es convergente, luego es acotada, en particular, acotada superiormente.  
 $\Leftarrow$  Note que la sucesión  $\{s_n\}$  es no decreciente, pues  $a_n \geq 0$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Así, si  $\{s_n\}$  es acotada superiormente, entonces, por el Teorema 9 de la Clase 37, tenemos que  $\{s_n\}$  es convergente, es decir, la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge. ■

**Teorema 5 (Criterio de comparación)** Sean  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  dos sucesiones tales que

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad (1)$$

para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Se tiene que, si  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  converge, entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.

**Demostración.** Sean  $\{s_n\}$  y  $\{t_n\}$  las sucesiones de sumas parciales de  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  respectivamente. De la condición (1) se sigue que

$$0 \leq s_n \leq t_n \quad (2)$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Luego, como  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  converge, la sucesión  $\{t_n\}$  converge, por lo que es acotada, luego acotada superiormente y de (2) se sigue que  $\{s_n\}$  es acotada. Finalmente, por la Proposición 4, tenemos que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge. ■

**Ejemplo 6** Demuestre que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - \cos(1 + n^3)}{2^n + \sin^2(1 - n^2)}$$

converge.

**Solución.**

Note que para cada  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que

$$-1 \leq -\cos(1 + n^3) \leq 1,$$

de donde

$$1 \leq 2 - \cos(1 + n^3) \leq 3, \quad (3)$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Ahora, como  $\sin^2(1 - n^2) \geq 0$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $2^n + \sin^2(1 - n^2) \geq 2^n > 0$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , así que

$$0 < \frac{1}{2^n + \sin^2(1 - n^2)} \leq \frac{1}{2^n}, \quad (4)$$

para toda  $n \in \mathbb{N}$ . De (3) y (4) se sigue que

$$0 \leq \frac{2 - \cos(1 + n^3)}{2^n + \sin^2(1 - n^2)} \leq \frac{3}{2^n}.$$

Pero además, por el Ejercicio 3 la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

converge y luego por el inciso (2) de la Proposición 2 de la Clase 39, tenemos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$$

converge. Así, por el Teorema 5, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - \cos(1 + n^3)}{2^n + \sin^2(1 - n^2)}$$

converge. ■

Continuamos con más criterios de convergencia para series.

**Teorema 7 (Criterio de comparación en el límite)** Sean  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  dos sucesiones tales que  $a_n, b_n > 0$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ , y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0.$$

Se tiene que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge si y sólo si  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  converge.

**Demostración.** Supongamos que  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  converge. Como  $a_n, b_n > 0$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0.$$

Así, para  $\varepsilon = c > 0$ , tenemos que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para cualquier  $n \geq N$  se tiene que

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| < c$$

y de aquí que

$$a_n < 2cb_n.$$

Ahora, como  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  converge, entonces, por el Lema 3 de la Ayudantía 26,  $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$  converge. Luego, por el Teorema 5, tenemos que

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n$$

converge. Luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \sum_{n=N}^{\infty} a_n$$

y como la primer suma de la derecha es finita, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge.

Para la necesidad, basta repetir la demostración de la suficiencia, pero en este caso usando que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{c} > 0.$$

■

**Ejemplo 8** Indique si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$  converge o no.

**Solución.** Consideremos las sucesiones  $\{a_n\} = \left\{ \frac{n+1}{n^2+1} \right\}$  y  $\{b_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$ . Note que  $a_n, b_n > 0$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{n^2+1} = 1 > 0.$$

Ahora, por el Ejemplo 5 de la Clase 39,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  no converge, por lo que, usando el Teorema 7, concluimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$$

no converge. ■

En el siguiente criterio usamos fuertemente la serie geométrica del Ejemplo 3.

**Teorema 9 (Criterio del Cociente)** Sea  $\{a_n\}$  una sucesión tal que  $a_n > 0$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ , y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r.$$

Entonces:

(1) Si  $r < 1$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.

(2) Si  $r > 1$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  no converge.

(3) Si  $r = 1$ , no podemos afirmar nada acerca de la convergencia de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

**Demostración.**

(1) Si  $r < 1$ , consideremos  $s \in (r, 1)$ . Luego, para  $\varepsilon = s - r > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para toda  $n \geq N$  se tiene que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - r \right| < s - r.$$

Y de esta última desigualdad se sigue que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < s,$$

para toda  $n \geq N$ . Note que de lo anterior obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} a_{N+1} &\leq s a_N \\ a_{N+2} &\leq s a_{N+1} \leq s^2 a_N \\ &\vdots \\ a_{N+k} &\leq s^k a_N. \end{aligned}$$

Ahora, como  $0 < s < 1$ , entonces la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} s^k$  converge, pues es una serie geométrica. Luego,

la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_N s^k$  converge. Ahora, por el Teorema 5, tenemos que la serie  $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$  converge,

Finalmente, como

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \sum_{n=N}^{\infty} a_n$$

y la primer suma de la derecha es finita, tenemos que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.

- (2) Ahora, si  $r > 1$ , consideremos  $s \in (1, r)$ . Así, para  $\varepsilon = r - s > 0$  tenemos que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq N$ ,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - r \right| < r - s.$$

Y de esta última desigualdad se sigue que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > s,$$

para toda  $n \geq N$ . Por lo tanto  $a_{N+k} > s^k a_N$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  y de aquí que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0.$$

Por el Teorema 2, concluimos que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  no converge.

- (3) Considere la sucesión  $\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$ . Se tiene que  $a_n > 0$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Pero, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  no converge. Por otro lado, si consideramos la sucesión  $\{b_n\} = \left\{ \frac{1}{n^2} \right\}$ , se tiene que  $b_n > 0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

Pero, como veremos más adelante, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  converge.

Así, terminamos nuestra demostración. ■

**Ejemplo 10** Indique si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$  converge o no.

**Solución.** Considere la sucesión  $\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{n!} \right\}$ . Se tiene que  $a_n > 0$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Así, por el Teorema 9, tenemos que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$  converge. ■

**Ejemplo 11** Indique para que  $r \geq 0$  la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} nr^n$  converge.

**Solución.** Considere la sucesión  $\{a_n\} = \{nr^n\}$ . Se tiene que  $a_n > 0$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)r^{n+1}}{nr^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r(n+1)}{n} = r.$$

Así, por el Teorema 9, si  $0 \leq r < 1$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} nr^n$  converge; si  $r > 1$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} nr^n$  no converge y finalmente, si  $r = 1$ , es claro que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \sum_{n=1}^{\infty} n$  no converge. ■

En todos los capítulos anteriores hemos utilizado el concepto de integral y este no será la excepción.

**Teorema 12 (Criterio de la Integral)** Sea  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función positiva y decreciente. Si consideramos la sucesión  $\{a_n\} = \{f(n)\}$ , se tiene que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge si y sólo si la

integral impropia  $\int_1^{\infty} f$  existe.

**Demostración.** Note que, por ser  $f$  decreciente en  $[1, \infty)$ ,

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f \leq f(n),$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Es decir,

$$a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f \leq a_n, \quad (5)$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Ahora, si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, tenemos, por la segunda desigualdad de (5) que

$$\int_1^n f = \sum_{i=1}^n \int_i^{i+1} f \leq \sum_{i=1}^n a_i \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Es decir, la sucesión  $\left\{ \int_1^n f \right\}$  es acotada superiormente. Como además es creciente, pues  $f$  es positiva, tenemos que  $\left\{ \int_1^n f \right\}$  converge, es decir, existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f,$$

esto es, la integral impropia

$$\int_1^{\infty} f$$

existe.

Por otro lado, si suponemos que la integral impropia  $\int_1^{\infty} f$  existe, por la primer desigualdad de (5), tenemos que

$$\sum_{i=2}^n a_i \leq \sum_{i=1}^n \int_i^{i+1} f = \int_1^n f \leq \int_1^{\infty} f.$$

Y de aquí que la sucesión  $\left\{ \sum_{i=2}^n a_i \right\}$  es acotada superiormente, pero además es creciente pues  $f$  es positiva, por lo que es convergente, es decir, la serie  $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$  converge. De aquí, se sigue que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge. ■

**Ejemplo 13** Sea  $p > 0$ . Indique si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  converge o no.

**Solución.** Consideremos la función  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \frac{1}{x^p}$ . Note que  $f$  es positiva y decreciente. Además

$$\int_1^N f = \begin{cases} \frac{1}{p-1} - \frac{1}{N^{p-1}(p-1)} & \text{si } p \neq 1 \\ \ln(N) & \text{si } p = 1. \end{cases}$$

Así, tenemos que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N f$  existe si  $p > 1$ , pero si  $p \leq 1$ , entonces no existe. Así, por el Teorema 12, tenemos que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  converge si  $p > 1$  y si  $p \leq 1$  no converge.

Note que, como casos particulares, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  converge y la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  no converge. ■