Cálculo diferencial e integral II
Tarea 01

Observación: Los problemas de la sección *Ejercicios* no se entregan, solo son para practicar.
Indicaciones: Resuelva exactamente 8 ejercicios de la sección *Tarea*.
Fecha de entrega: 17 de febrero de 2022.

Tarea

1. Sea $b > 0$. Considere la función $f : [0, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$. Muestre que f es integrable en $[0, b]$ y halle $\int\limits_0^b f$.

2. Sean a, b, c, r, $s \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $c \in (a, b)$ y $0 < r < s$. Definimos $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante:
$$f(x) = \begin{cases} r & \text{si} \quad x < c \\ r + s & \text{si} \quad x = c \\ s & \text{si} \quad x > c \end{cases}$$
Demuestre que f es integrable en $[a, b]$.

3. Considere $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por
$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ x + 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$
Decida si g es integrable en [0,1], argumente su respuesta.

4. Sea $c \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en su dominio. Demuestre que:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x - c)dx.$$

5. Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y continua en [a,b], excepto en $x_0 \in [a, b]$. Demuestre que f es integrable en [a,b]. Trate por separado los casos $x_0 \in (a, b)$ y $x_0 \in \{a, b\}$.

6. Sea f una función integrable en $[a, b]$ y no negativa en $[a, b]$. Demuestre que si f es continua en $c \in [a, b]$ y $f(c) > 0$, entonces $\int_a^b f > 0$. Trate por separado los casos $x_0 \in (a, b)$ y $x_0 \in \{a, b\}$.

7. Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones integrables sobre [a,b]. Demuestre que:
   a) f^2 es integrable sobre [a,b]
   b) fg es integrable sobre [a,b]. *Sugerencia:* Demuestre que $(f + g)^2$ es integrable.

8. Dé un ejemplo de una función $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ que no sea integrable en $[0, 1]$, pero tal que $|f|$ sea integrable en $[0, 1]$.

9. Si f es integrable en $[a, b]$ y $0 \leqslant m \leqslant f(x) \leqslant M$ para todo $x \in [a, b]$, muestre que
$$m \leqslant \left[\frac{1}{b - a} \int_a^b f^2 \right]^{1/2} \leqslant M.$$

10. Si f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $f(x) \geqslant 0$ para cada $x \in [a,b]$, muestre que existe $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = \left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2\right]^{1/2}.$$

Ejercicios

1. Demuestre las siguientes identidades utilizando solamente las propiedades vistas en clase (aditiva, homogénea y telescópica) para la notación sigma.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{M} n^2 = \frac{M^3}{3} + \frac{M^2}{2} + \frac{M}{6}$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{M} n^3 = \frac{M^4}{4} + \frac{M^3}{2} + \frac{M^2}{4}$

   Sugerencia: $x^3 - (x-1)^3 = 3x^2 - 3x + 1$

2. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 2-x & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

   Decida si f es integrable en $[0,1]$. Argumente su respuesta.

3. Sea b<0. Considere la función $f : [b,0] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Demuestre que f es integrable y calcule $\displaystyle\int_b^0 f$.

4. Sea $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + \lfloor x \rfloor$. Indique si f es integrable en $[0,2]$. Argumente su respuesta.

5. Sea $k \neq 0$ y $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en su dominio. Demuestre que:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)dx$$

6. Demuestre, usando el principio de inducción matemática, que para todo número natural n se cumple que

$$\int_0^{n^2} \lfloor\sqrt{x}\rfloor dx = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}$$

   (dé por hecho que $f(x) = \lfloor\sqrt{x}\rfloor$ es integrable en cada intervalo de la forma $[0,n^2]$).

7. Muestre que

$$\frac{5\sqrt{2}}{6} \leq \int_2^{9/2} \frac{\sqrt{x}}{2+\operatorname{sen}^2(x)}\, dx \leq \frac{15}{4\sqrt{2}}.$$

8. Sean $a,b > 0$. Pruebe que existe $x \in [a-2, a+2]$ tal que

$$\int_{a-2}^{x}\left(b + \sqrt{1 - \frac{(t-a)^2}{4}}\right)dt = \frac{\pi}{2}.$$

   Puede utilizar que el área de una elipse es π por el producto de las longitudes de sus semiejes y que

$$\int_{a-2}^{a+2}\left(b + \sqrt{1 - \frac{(t-a)^2}{4}}\right)dt = \pi + 4b.$$