

Cálculo diferencial e integral II

Tarea 02

Observación: Los problemas de la sección *Ejercicios* no se entregan, solo son para practicar.

Indicaciones: Resuelva exactamente 7 ejercicios de la sección *Tarea*.

Fecha de entrega: 1 de marzo de 2023.

Tarea

1. Halle la derivada de las siguientes funciones. *En este ejercicio puede suponer que todas las composiciones tienen sentido.*

a) $H(x) = \int_0^x \sqrt{\sin y + y^2} dy$

b) $F(x) = \cos \left(\int_0^x \sin \left(\int_0^t \tan y \, dy \right) dt \right)$

c) $G(x) = \int_3^{(\int_2^x \sin^3(t) dt)} \frac{dt}{1 + \cos^2 t + t^2}$

2. Sea $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable con $f(a) = \int_a^b f$. Pruebe que

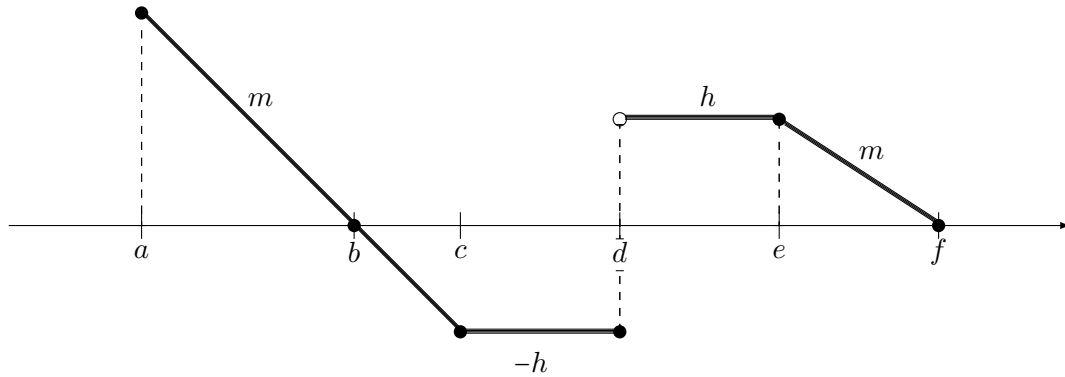
$$\int_a^x (f'(t) + f(t)) dt = f(x) - \int_x^b f(t) \, dt.$$

3. Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en su dominio y para toda x en $[a, b]$ se cumple $f(x) > 0$. Demuestre que existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\frac{\int_a^b g}{\int_a^b f} = \frac{g(c)}{f(c)}.$$

4. Construya una función f tal que $f'''(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$.
5. Considere que el siguiente dibujo representa la gráfica de una función f definida por pedazos en un intervalo cerrado $[a, f]$ donde m indica la pendiente de las rectas y $h, -h$ las alturas de los tramos constantes de la función. Esboce la gráfica de $F(x) = \int_a^x f$ en ese intervalo usando técnicas de cálculo.

Gráfica de $f(x)$



6. Sea $k \geq 0$ fijo. Use el Teorema Fundamental del Cálculo para demostrar que si $n \in \mathbb{N}$, entonces para cualquier $x \geq k + 1$ se cumple que

$$\int_{1+k}^{(x-k)^{n+k}} \frac{1}{t-k} dt = n \int_{1+k}^x \frac{1}{t-k} dt.$$

7. Decida si las siguientes integrales impropias existen. Justifique su respuesta.

a) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$

b) $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^{3/2}} dx$

8. Sean $f, g : [0, a] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que $0 \leq g(x) \leq f(x)$ para toda $x \in (0, a]$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \infty$, la integral impropia $\int_0^a f$ existe y para toda $0 < \varepsilon \leq a$ existe $\int_\varepsilon^a g$. Demuestre que existe $\int_0^a g$.
9. Definimos un tercer tipo de integral impropia para funciones no acotadas sobre intervalos no acotados: Sea $f : [0, \infty) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función no negativa tal que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$. Si existen $\int_0^a f$ y $\int_a^\infty f$, definimos la integral impropia $\int_0^\infty f$ como

$$\int_0^\infty f = \int_0^a f + \int_a^\infty f.$$

Averigüe si existen las siguientes integrales impropias. Justifique su respuesta.

a) $\int_0^\infty \frac{1}{x\sqrt{1+x}} dx.$

b) $\int_0^\infty f(x) dx$, donde

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Ejercicios

1. Halle la derivada de cada una de las siguientes funciones. *En este ejercicio puede suponer que todas las composiciones tienen sentido.*

a) $F(x) = \int_3^{(\int_2^x \sin^3 t dt)} \frac{dt}{1 + \sin^6 t + t^2}$

b) $F(x) = \int_0^x \frac{t^2 dt}{\sin t + \cos t + 1}$

c) $F(x) = \int_3^x \sqrt{\sin t + t^2} dt$

2. Sin calcular la integral y usando técnicas de cálculo, esboce la gráfica de las siguientes funciones.

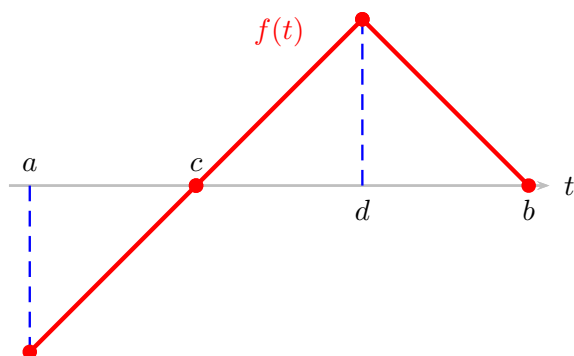
a) $F : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_{-1}^x \frac{1}{1+t^2} dt$.

b) $G : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $G(x) = \int_{-1}^x |t| dt$.

c) $H : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $H(x) = \int_0^x \lfloor t \rfloor dt$.

3. Suponga que cada uno de los siguientes dibujos representa la gráfica de una función f definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. Utilizando técnicas de cálculo, esboce la gráfica de la función $F : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ indicada en cada caso.

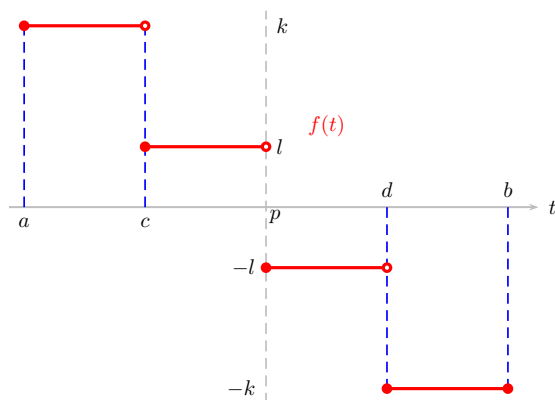
a)



donde $F : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt.$$

b)



donde $[a, c]$ y $[d, b]$ tienen la misma longitud, $[c, p]$ y $[p, d]$ tienen la misma longitud y la función $F : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

4. Considere $F(x) = \int_0^x x f(t) dt$, donde f es una función continua.

a) Halle $F'(x)$.

b) Utilice el resultado del inciso a para demostrar que $\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt \right) du$.