Cálculo diferencial e integral II
Tarea 03

Observación: Los problemas de la sección *Ejercicios* no se entregan, solo son para practicar.
Indicaciones: Resuelva exactamente 8 ejercicios de la sección *Tarea*.
Fecha de entrega: 14 de marzo de 2023.

Tarea

1. Demuestre, usando técnicas de cálculo, que $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$, para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2. Demuestre la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

   a) Para todo $x \neq 0$ se cumple que $\operatorname{sen}(2x) \neq 2\operatorname{sen}(x)$.
   b) Para cualquier x exite un y tal que $\cos(x+y) = \cos(x) + \cos(y)$.
   c) Existe $x \neq 0$ tal que $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y)$ para todo y.
   d) Existe $y \neq 0$ tal que $\int_0^y \operatorname{sen}(x)dx = \operatorname{sen}(y)$.

3. Determine si existe el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(4x)\operatorname{sen}(3x)}{x\operatorname{sen}(2x)}.$$

4. Sean I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ que contiene al cero y $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables en I tales que $f(0) = 0$, $g(0) = 1$ y cuyas derivadas satisfacen las ecuaciones $f'(x) = g(x)$, $g'(x) = -f(x)$ para todo $x \in I$.

   a) Demuestre que $f^2(x) + g^2(x) = 1$, para todo $x \in I$.
   b) Demuestre que si F y G son dos funciones que satisfacen lo mismo que f y g, respectivamente, entonces $F(x) = f(x)$ y $G(x) = g(x)$. *Sugerencia: Defina una función auxiliar* $h = (F-f)^2 + (G-g)^2$.

5. Demuestre que $|\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y)| < |x-y|$, para todos los números $x \neq y$.

6. Demuestre que se cumple la siguiente desigualdad estricta: $\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}(t)}{1+t}dt > 0$

7. Demuestre que si $\tan(a)\tan(b) \neq -1$, entonces

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y periódica de periodo $T > 0$. Demuestre, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, que

$$\int_a^{a+T} f = \int_b^{b+T} f.$$

9. Demuestre que para toda $x \neq 1$ se cumple que:

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{\pi}{4}$$

10. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = 3 + \int_0^x \frac{1+\operatorname{sen}(t)}{2+t^2} dt$$

Construya una función cuadrática, $g(x) = ax^2 + bx + c$, que cumpla lo siguiente: $g(0) = f(0)$, $g'(0) = f'(0)$ y $g''(0) = f''(0)$.

Ejercicios

1. Indique si los siguientes límites existen y argumente su respuesta.

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)+\tan(x)}{x}$

   b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(x)-\sin(x)}{x(1-\cos(x))}$

   c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x-\sin(x)}{x+\sin(x)}$

   d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2}\right)$

2. Halle una fórmula para $\operatorname{sen}(3\alpha)$ y $\cos(3\alpha)$ y utilice estas fórmulas para hallar el valor de $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ y $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

3. Halle expresiones equivalentes para $\operatorname{sen}(\arctan(x))$ y $\cos(\arctan(x))$ que no incluyan funciones trigonométricas.

4. Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2} - \cos^2(2t)\right)dt}{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$$

5. Demuestre que la función seno es una función impar utilizando técnicas de cálculo.

6. Calcule la derivada de las siguientes funciones

   a) $\operatorname{arc\,sen} \dfrac{x}{2}$

   b) $\operatorname{arc\,cos} \dfrac{1-x}{\sqrt{2}}$

   c) $\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x - \cos x)$

   d) $\sqrt{x} - \arctan\sqrt{x}$

7. Demuestre que para toda $x > 0$ se cumple: $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

8. Suponga que $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Exprese $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ en términos de t.