Cálculo diferencial e integral II
Tarea 04

Observación: Los problemas de la sección *Ejercicios* no se entregan, solo son para practicar.
Indicaciones: Resuelva exactamente 8 ejercicios de la sección *Tarea*.
Fecha de entrega: 22 de marzo de 2023

Tarea

1. Derive las siguientes funciones, suponiendo que todas las composiciones tienen sentido en algún subconjunto de $\mathbb{R}$:

   a) $f(x) = e^{\left(\int_0^x e^{-t^2}\right)}dt$

   b) $f(x) = (\operatorname{sen}(x))^{(\cos(x))^x}$

   c) $f(x) = \cos\left(x^{\ln(x)}\right)$

   d) $f(x) = log_{x^2}(\operatorname{sen}(e^x))$

   e) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{e^{\cos(x^2)}}{\log_{\operatorname{sen}(x)}(1-x^2)}\right)$

2. Calcule los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

   b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{cx}-1}{x}$

3. Demuestre que para cualesquiera $x, y > 0$ se cumple que:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}.$$

   Use la desigualdad anterior para demostrar que si $a, b, c > 1$, entonces:

$$\log_a(bc) + \log_b(ac) + \log_c(ab) \geq 4\left[\log_{bc}(a) + \log_{ac}(b) + \log_{ab}(c)\right]$$

4. Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{-x^2}\int_x^{x+\frac{\ln(x)}{x}} e^{-t^2}dt\right)$$

5. Sea $a > 0$. Definimos $f(x) = \dfrac{1}{2}(a^x + a^{-x})$. Demuestre que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

6. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ cumple que:

$$f(x) = \int_0^x e^t f(t)dt$$

   Demuestre que existe $c \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ce^{(e^x-1)}$.

7. Pruebe que:

$$\int_0^{\operatorname{senh}(x)} \sqrt{t^2+1}dt = \frac{x}{2} + \frac{\cosh(x)\cdot\operatorname{senh}(x)}{2}$$

8. Demuestre que para $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $(\operatorname{senh}(x) + \cosh(x))^n = \operatorname{senh}(nx) + \cosh(nx)$

Ejercicios

1. Derive las siguientes funciones:

   a) $f(x) = x^{3\sqrt{x}}$

   b) $f(x) = \log_{(1-x)}\left(\dfrac{2^x - \operatorname{sen}(x)}{2^x + \cos(x)}\right)$

   c) $f(x) = \arccos(\operatorname{sen}(\log(x^4)))$

   d) $f(x) = \tan(e^{2^{x\operatorname{sen}(x)}})$

2. Demuestre las iguientes fórmulas de cambio de base para logaritmos:

   a) $\log_b(x) = \log_b(a)\log_a(x)$

   b) $\log_b(x) = \dfrac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$

3. Demuestre que para todo $x > 0$, $x \neq 1$, se cumple lo siguiente:

$$1 - \frac{1}{x} < \ln(x) < x - 1$$

4. Demuestre que $\log_{10}(2)$ es un número irracional.

5. Demuestre que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes desigualdades:

   a) $e^x > 1 + x$

   b) $e^{-x} > 1 - x$

6. Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)}{\ln(1+x)}$$

7. Demuestre que la ecuación $e^x - x - 1 = 0$ tiene una única solución y encuéntrela.

8. Esboce las gráficas de las funciones $\operatorname{senh}(x)$, $\cosh(x)$ y $\tanh(x)$ utilizando técnicas de cálculo.

9. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en todo $\mathbb{R}$, tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ cumple que

$$f(f(x)) = \int_0^{f(x)} f^2(t)dt.$$

   Demuestre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(f(x)) = c\exp\left(\int_0^{f(x)} f(t)dt.\right)$

10. Demuestre que $\tanh^2(x) + \operatorname{sech}^2(x) = 1$