

Cálculo diferencial e integral II

Tarea 05

Observación: Los problemas de la sección *Ejercicios* no se entregan, solo son para practicar.

Indicaciones: Resuelva exactamente 6 ejercicios de la sección *Tarea*.

Fecha de entrega: 24 de abril de 2023

Tarea

1. Calcule exactamente 3 de las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \frac{\ln(\ln(x))}{x \ln(x)} dx$

c) $\int 2x \ln(x) dx$

b) $\int \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) dx$

d) $\int \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$

2. Calcule exactamente 3 de las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \csc^3(x) dx$

c) $\int (-\tan(x)(\cot(x) + 1) \cos(x) + \sin(x)) dx$

b) $\int \arccos^2(x) dx$

d) $\int \sqrt{\cot(x)} dx$

3. Calcule exactamente 3 de las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int e^{\sqrt{x}} dx$

c) $\int \tanh^3(x) dx$

b) $\int \frac{e^x + 1}{\sqrt{e^x + 1}} dx$

d) $\int \frac{4e^x}{e^{2x} - 4} dx$

4. Calcule exactamente 3 de las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x} + 1}}$

c) $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2}; a \in \mathbb{R}$

b) $\int \frac{dx}{x^4 + 1}$

d) $\int x\sqrt{1 - x^2} dx$

5. En cada inciso, encuentre el área entre las curvas indicadas en el intervalo formado por sus intersecciones:

a) $f(x) = x^2 - 4x$ y $g(x) = -x^2$

b) $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x$ y $g(x) = -\frac{1}{2}x$

6. Resuelva los siguientes ejercicios:

a) Encuentre el volumen del sólido obtenido al girar la región acotada por las gráficas de $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ alrededor del eje X .

b) Encuentre el volumen del toro obtenido al rotar la circunferencia $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ alrededor del eje Y , considere que $a > r > 0$.

7. Considere las funciones $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas mediante las siguientes reglas de correspondencia:

$$f(Q) = \frac{6000}{Q + 50} \text{ y } g(Q) = Q + 10$$

Encuentre un intervalo $I \subseteq [0, \infty)$ tal que $0 \in I$ y f y g son no negativas en I , y además determine las respectivas curvas de oferta y demanda. Pruebe que existe un punto de equilibrio para f y g , y encuentre el superávit del productor y del consumidor.

8. Recuerde que el trabajo total invertido por un gas cuando se expande en un proceso cuasiestático está dado por

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} p dV$$

Donde p denota la presión, que es función del volumen, y V_i, V_f indican el volumen inicial y final del proceso respectivamente.

Considere que una muestra de gas ideal se expande al doble de su volumen original $V_i = 1\text{m}^3$ en un proceso cuasi estático para el que $P = \alpha V^2$, con $\alpha = 5 \frac{\text{atm}}{\text{m}^6}$ ¿Cuánto trabajo realiza el gas al expandirse?

9. Calcule el momento de inercia de un anillo delgado de radio 1m y masa M que puede girar respecto a su centro geométrico. (*Sugerencia:* Considere medio anillo en primer lugar.)

Ejercicios

1. Calcule las siguientes integrales:

a) $\int \text{sech}^3(x) dx$

c) $\int \sqrt{x} \ln(x^2) dx$

b) $\int \ln(\sqrt{1-x^2}) dx$

d) $\int \ln^2(x^2) dx$

2. Calcule las siguientes integrales:

a) $\int \sec^3(x) dx$

c) $\int \sqrt{\tan(x)} dx$

b) $\int \arcsin^2(x) dx$

d) $\int (\sec(x) \sin(x) + x) dx$

3. Calcule las siguientes integrales:

a) $\int \cos(\ln(x)) dx$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}; a \in \mathbb{R}$

b) $\int \frac{dx}{x^6 + 1}$

d) $\int x \sqrt{1-x^2} dx$

4. Calcule las siguientes integrales:

a) $\int \frac{e^x}{e^x + 5} dx$

c) $\int \sin(\ln(x)) dx$

b) $\int \frac{3e^x}{e^{2x} + 5e^x + 6} dx$

d) $\int (-2xe^{-x^2}) dx$

$$e) \int \frac{x}{2 + \sin(x)} dx$$

$$f) \int \frac{x}{1 + \cos^2(x)} dx$$

5. En cada inciso encuentre el área bajo las curvas indicadas:

$$a) f(x) = \ln(x) \text{ y } g(x) = \ln^2(x)$$

$$b) f(x) = y \text{ y } g(x) =$$

6. Halle la longitud de arco de la curva $f(x) = \ln(x)$ desde $x = \sqrt{3}$ hasta $x = \sqrt{8}$.

7. Demuestre que el área de la superficie de una esfera de radio $r > 0$ es $4\pi r^2$

8. Se quiere diseñar un reloj para la plaza principal de una ciudad, cuyas manecillas no sean rectas, sino secciones parabólicas apartir del vértice. Para ello, es necesario que los ingenieros conozcan el momento de inercia de las nuevas manecillas. ¿Puede ayudarles? Considere que la varilla tiene masa total M y que dicha masa está distribuida de manera homogénea a lo largo de la manecilla. (*Sugerencia:* Se puede considerar a la manecilla como una varilla delgada que coincide con la gráfica de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, a]$ y que tiene supunto fijo (el centro de giro) en el origen.)