

Cálculo diferencial e integral II

Tarea 06

Observación: Los problemas de la sección *Ejercicios* no se entregan, solo son para practicar.

Indicaciones: Resuelva y entregue exactamente 6 ejercicios de la sección *Tarea*.

Fecha de entrega: 3 de mayo de 2023

Tarea

1. Calcule el polinomio de Taylor de las siguientes funciones, del grado indicado en el punto indicado.

a) $\cos(x)$, grado $2n$ en π .

b) $\frac{1}{1+x^2}$, grado $2n+1$ en cero.

2. Sea $f(x) = x^5 - x^2 + x$. Muestre que

$$P_{5,f,2}(x) = f(x)$$

3. Pruebe que si $x > 0$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$e^x \geq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

4. Aproxime cada uno de los siguientes números con el grado de precisión que se especifica.

a) $\sin(1)$, error $< 10^{-17}$

b) e^2 , error $< 10^{-5}$

5. Halle los siguientes límites usando Polinomios de Taylor:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x - \sin(x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^2 \sin^2(x)}$

6. Demuestre que π se puede aproximar como 3.14159, para ello utilice la siguiente identidad¹:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

7. En este problema se estudia la relación entre las funciones pares e impares y las potencias que aparecen en sus polinomios de Taylor. Suponga que f es una función diferenciable.

- a) Muestre que si f es una función par, entonces f' es una función impar. Además, pruebe que si f es una función impar, entonces f' es una función par.
- b) Demuestre que si f es una función impar, entonces $f(0) = 0$.
- c) Muestre que si f es una función impar, entonces $f^{(n)}(0) = 0$ para cualquier n par.
- d) Pruebe que si f es una función impar, entonces el polinomio de Taylor de grado $n \geq 1$ de f alrededor de 0, sólo contiene potencias impares de x .

¿Qué puede decir acerca del polinomio de Taylor si supone que f es una función par?

¹Esta identidad fue descubierta en 1706 por John Machin (1680-1751)

Ejercicios

1. Calcule el polinomio de Taylor de grado n de las siguientes funciones alrededor de cero.

a) a^x , con $a \in \mathbb{R}^+$.

c) $\frac{1}{2-x}$.

b) $\frac{1}{1+x}$.

2. Calcule el polinomio de Taylor de las siguientes funciones, del grado indicado en el punto indicado.

a) e^{e^x} , grado 3 en 0

c) $\text{sen}(x)$, grado $2n$ en $\frac{\pi}{2}$.

b) $e^{\text{sen}(x)}$, grado 3 en 0.

d) $x^4 - 12x^3 + 44x^2 + 2x + 1$, grado 3 en 3.

3. Aproxime cada uno de los siguientes números con el grado de precisión que se especifica.

a) $\text{sen}(1/2)$, error $< 10^{-20}$

b) e^x , error $< 10^{-4}$

4. Aproxime el valor de $\int_0^{0.1} \exp x^2 dx$ con un error menor que 10^{-5} .

5. Halle los siguientes límites usando Polinomios de Taylor:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\text{sen}^2(x)} - \frac{1}{\text{sen}(x^2)}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x) \arctan(x) - x^2}{1 - \cos(x^2)}$

6. Aproxime π con el mismo error que en el ejercicio 6 de la sección tarea pero usando:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$$