Cálculo diferencial e integral II
Tarea-examen de Sucesiones y Series

Indicaciones: Resuelva y entregue exactamente 4 ejercicios de cada sección.
Fecha de entrega: 2 de junio de 2023

Sucesiones

1. Demuestre los siguientes límites usando la definición:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{-3n}{n+1}\right) = -3$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n}\right) = \infty$

   c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+1}{n-n^3}\right) = 0$

   d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\right) = -\dfrac{3}{2}$

2. Determine si los siguientes límites existen y demuestre sus afirmaciones:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n-\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n-1}-\dfrac{n^2+1}{n-2}\right)$

   c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2kn+1}-\sqrt{n^2+5}\right)$, donde k es un número no negativo fijo.

   d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n(n^4+2n^3-3n^2-4n+4)}{(n-1)^4}\right)$

3. Sea $a\in\mathbb{R}$. Demuestre que

   a) si $0<a<1$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$

   b) si $1<a$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$

4. Halle, si existe, el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right).$$

5. Sean a, b números postitivos tales que $a>b$. Sean $a_1=\dfrac{a+b}{2}$, la media aritmética y $b_1=\sqrt{ab}$ la media geométrica.

   Definimos, de manera recursiva, dos sucesiones: $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ y $b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$

   a) Muestre que $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son convergentes. *Sugerencia: Use inducción matemática para demostrar que* $a_n>a_{n+1}>b_{n+1}>b_n$.

   b) Muestre que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ [1]

[1] Gauss llamó «media aritmético-geométrica de a y b» al valor común de estos límites.

Series

1. Determine si las siguientes series convergen. Justifique su respuesta:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right)$

   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\ln^2(n)}\right)$

   e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos^3(1-n^4)}{n^4}\right)$

   f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10}{\sqrt[4]{n^3+10}}\right)$

2. Pruebe que si $\{a_n\}$ es una sucesión monótona (que es o bien no decreciente o bien no creciente) y la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n = 0$

3. Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente si y sólo si cada *subserie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ converge.

4. Considere la siguiente identidad[2]:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

   Demuestre que la serie converge y use el primer término para estimar los primeros cinco dígitos de π (escriba todas las operaciones explícitamente, considere $\sqrt{2}\approx 1.4142$)

5. Considere la sucesión de Fibonacci: $a_1 = a_2 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3$. Demuestre cada uno de los siguientes enunciados:

   a) $\displaystyle\frac{1}{a_{n-1}a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n-1}a_n} - \frac{1}{a_n a_{n+1}}$

   b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{a_{n-1}a_{n+1}} = 1$

   c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}a_{n+1}} = 2$

6. Considere la serie armónica alternante:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

   Exhiba un reordenamiento explícito de la serie cuya suma sea estrictamente mayor que $ln(2)$

[2] Descubierta en 1910 por Srinivasa Ramanujan. Fue utilizada en 1985 por William Gosper para calcular los primeros 17 millones de dígitos de π