Cálculo diferencial e integral I
Ayudantía 03

Ejercicio 1. *Halle el conjunto de números $x \in \mathbb{R}$ tales que*

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 4 > 8$$

Demostración. En primer lugar, notamos que la desigualdad anterior es equivalente a

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 > 0,$$

lo cual se obtiene al sumar -8 en ambos lados de la desigualdad. Para aplicar los resultados que conocemos, intentemos obtener una factorización de la expresión que aparece a la izquierda de la desigualdad, para ello, notemos que

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - 4x - 12 &= (x-2)\left(x^2 + 5x + 6\right) \\ &= (x-2)(x+2)(x+3) \end{aligned}$$

por lo cual, la inecuación que nos interesa es equivalente a

$$(x-2)(x+2)(x+3) > 0.$$

Considerando lo anterior, queremos que el producto de tres números sea mayor que 0, lo cual nos lleva a los siguientes casos:

(I) Los tres números son positivos: notemos que si a, b, $c > 0$, entonces $ab > 0$, lo cual implica que $abc > 0$.

(II) Dos números son negativos y uno positivo: si $a > 0$ y b, $c < 0$, entonces $bc > 0$ (¿puede decir por qué?), y por lo tanto, $abc > 0$.

¿Por qué no puede ocurrir que haya dos números positivos y uno negativo?
A continuación, analizamos cada uno de los casos.

Caso (I). Entonces $x + 2 > 0$, $x + 3 > 0$ y $x - 2 > 0$, lo cual implica que $x > -2$, $x > -3$ y $x > 2$. Ahora, para obtener la conclusión deseada, notemos que se deben cumplir las 3 condiciones al mismo tiempo, así que el conjunto solución se obtiene al considerar la intersección de los respectivos conjuntos solución de las tres desigualdades, entonces

$$\mathscr{C}_1 = (-2, \infty) \cap (-3, \infty) \cap (2, \infty) = (2, \infty).$$

Caso (II). En este caso hay que elegir 2 de los 3 números para que sean los que consideramos negativos, es decir, tenemos $\binom{3}{2} = 3$ subcasos. Analicemos cada uno de ellos.

Subcaso 1. Supongamos que $x - 2 > 0$, entonces $x + 3 < 0$ y $x + 2 < 0$. Lo anterior implica que $x > 2$, $x < -3$ y $x < -2$. Nuevamente, debemos considerar la intersección de los respectivos conjuntos solución de las tres desigualdades, así que

$$\mathscr{C}_2 = (2, \infty) \cap (-\infty, -3) \cap (-\infty, -2) = \varnothing.$$

Por lo tanto, en este caso no hay valores que satisfagan todas las condiciones.

Subcaso 2. Ahora supongamos que $x+3>0$, entonces $x-2<0$ y $x+2<0$. A partir de esto se sigue que $x>-3$, $x<2$ y $x<-2$. Luego, obtenemos otro conjunto solución al considerar la intersección de los respectivos conjuntos solución de las tres desigualdades, esto es,

$$\mathscr{C}_3 = (-3,\infty) \cap (-\infty,2) \cap (-\infty,-2) = (-3,-2)\,.$$

Subcaso 3. Consideremos que $x+2>0$, de donde, $x-2<0$ y $x+3<0$. De esto se obtiene que $x>-2$, $x<2$ y $x<-3$, entonces

$$\mathscr{C}_4 = (-2,\infty) \cap (-\infty,2) \cap (-\infty,-3) = \varnothing.$$

En conclusión, el conjunto solución es la unión de los anteriores conjuntos soluciones parciales, es decir,

$$\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2 \cup \mathscr{C}_3 \cup \mathscr{C}_4 = (2,\infty) \cup (-3,-2)\,.$$

□

Continuamos con el siguiente resultado.

Lema 2. *Sean $a,\ b \in \mathbb{R}$ con $b \geq 0$. Se cumple que $|a| \geq b$ si y sólo si $a \geq b$ o $a \leq -b$.*

Demostración. Supongamos que $|a| \geq b$. Si $a \geq 0$, entonces por definición de valor absoluto se tiene que $|a| = a$, así que $a = |a| \geq b$, de donde $a \geq b$. Por otro lado, si $a < 0$, entonces $|a| = -a$, por lo cual $-a = |a| \geq b$, de donde $-a \geq b$, lo cual implica que $a \leq -b$. De lo anterior se sigue que $a \geq b$ o $a \leq -b$.

A continuación, supongamos que $a \geq b$ o que $a \leq -b$. Si $a \geq b$, entonces $a \geq 0$, de donde $|a| = a$, lo cual implica que $|a| \geq b$. Por otro lado, si $a \leq -b \leq 0$, entonces $0 \leq b \leq -a$, de donde $|a| = -a$ y por lo tanto $|a| \geq b$. De ambos casos se concluye que $|a| \geq b$. □

Ejemplo 3. Halle los números $x \in \mathbb{R}$ tales que $|x+4| \geq 5$.

Demostración. Tenemos que $5 \geq 0$, así que podemos aplicar el Lema 2. Ahora, en virtud del mencionado Lema 2, nos basta encontrar $x \in \mathbb{R}$ tal que $x+4 \geq 5$ o $x+4 \leq -5$. En el primer caso, si $x+4 \geq 5$, entonces $x \geq 5-4 = 1$; mientras que si $x+4 \leq -5$, entonces $x \leq -5-4 = -9$. Por lo tanto, el conjunto de puntos que cumplen la desigualdad pedida está dado por la unión de los intervalos $(-\infty,-9]$ y $[1,\infty)$. □

Observación 4. Notemos que en el enunciado del Lema 2 es posible cambiar el signo de mayor o igual por el de mayor, es decir, dados $a,\ b \in \mathbb{R}$ con $b \geq 0$ se cumple que $|a| > b$ si y sólo si $a > b$ o $a < -b$.

Ejercicio 5. *Halle todos los números $x \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\frac{1}{6} \leq \frac{1}{|x-5|} < \frac{1}{3}$$

Demostración. Es importante notar que no puede ocurrir que $x = 5$ porque en tal caso obtendríamos $|x-5| = |5-5| = |0| = 0$, lo cual nos llevaría a una división entre 0, pero esto es imposible (¿puede decir por qué?).

Tenemos que un valor $x \in \mathbb{R}$ cumple la desigualdad que nos interesa si satisface las siguientes dos desigualdades: $\frac{1}{6} \leq \frac{1}{|x-5|}$ y $\frac{1}{|x-5|} < \frac{1}{3}$. Así que hallaremos los valores para los cuales se cumplen cada desigualdad y al final consideraremos la intersección para obtener el conjunto solución.

Tenemos que $x \in \mathbb{R}$ cumple que $\frac{1}{6} \leq \frac{1}{|x-5|}$ si y sólo si $6 \geq |x-5|$ porque estamos considerando los recíprocos de valores positivos, así que la desigualdad *se invierte*. Escribimos la desigualdad anterior como $|x-5| \leq 6$. A continuación, usamos el lema que dice que si $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \geq 0$, entonces $|a| \leq b$ si y sólo si $-b \leq a \leq b$, con lo cual obtenemos que

$$-6 \leq x - 5 \leq 6$$

y al sumar 5 a cada término de la desigualdad obtenemos la siguiente cadena de desigualdades que es equivalente a la anterior

$$-1 \leq x \leq 11.$$

Por lo tanto, en este caso, el conjunto solución es $\mathscr{C}_1 = [-1, 11]$.

Ahora, para analizar la desigualdad $\frac{1}{|x-5|} < \frac{1}{3}$, notamos que tenemos una desigualdad de términos positivos porque $\frac{1}{|x-5|} > 0$, así que podemos tomar los respectivos recíprocos y obtenemos la desigualdad equivalente $3 < |x-5|$. Luego, en virtud de la Observación 4, debe cumplirse que $3 < x - 5$ o que $x - 5 < -3$. En el primer caso, se debe tener que $8 < x$, mientras que en el segundo se tiene que $x < 2$. Por lo tanto, el conjunto solución que obtenemos aquí es

$$\mathscr{C}_2 = (8, \infty) \cup (-\infty, 2).$$

Finalmente, el conjunto solución buscado es

$$\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = [-1, 11] \cap ((8, \infty) \cup (-\infty, 2)) = [-1, 2) \cup (8, 11].$$

$\square$