Cálculo diferencial e integral I
Ayudantía 04

Ejercicio 1. *Demuestre usando el principio de inducción matemática que*

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

para todo número natural n.

Demostración. Haremos la prueba por inducción sobre n.

Base de inducción. Supongamos que $n = 1$. Por un lado obtenemos

$$\sum_{j=1}^{1} j^2 = 1^2 = 1,$$

donde la primera igualdad se obtiene por definición de la notación sigma, mientras que por otro lado se tiene que

$$\frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} = \frac{2(3)}{6} = 1.$$

Por lo anterior, en este caso se cumple que

$$\sum_{j=1}^{1} j^2 = \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6}.$$

Esto prueba la base de inducción.

Hipótesis de inducción. Supongamos que para $n \geq 1$ fijo se cumple el resultado, es decir, supongamos que

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Paso inductivo. Demostremos que el resultado es cierto para $n+1$, esto es, probemos que

$$\sum_{j=1}^{n+1} j^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Procedemos a la prueba. Notamos que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n+1} j^2 &= \sum_{j=1}^{n} j^2 + (n+1)^2 && (1)\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 && (2)\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}\\
&= \frac{(n+1)\left(2n^2 + n + 6n + 6\right)}{6}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(n+1)\left(2n^2+7n+6\right)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}, \qquad (3)
\end{aligned}
$$

donde 1 se obtiene por definición de la notación sigma y (2) se sigue a partir de la hipótesis de inducción. Esto concluye la prueba. □

Ejercicio 2. *Considere la sucesión de Fibonaci F_1, F_2, …, y demuestre que*

$$(F_1)^2 + (F_2)^2 + \cdots + (F_n)^2 = F_n \cdot F_{n+1}.$$

Demostración. Haremos la prueba por inducción sobre n.

Base de inducción. Supongamos que $n = 1$. Entonces solo tenemos la suma $(F_1)^2 = (1)^2 = 1$. Por otro lado, $F_1 \cdot F_2 = 1 \cdot 1 = 1$.

Ahora, consideremos $n = 2$. Por un lado tenemos que

$$(F_1)^2 + (F_2)^2 = (1)^2 + (1)^2 = 2,$$

mientras que por otro,

$$F_2 \cdot F_3 = 1 \cdot 2 = 2.$$

Esto termina la prueba de la base de inducción.

Hipótesis de inducción. Supongamos que el resultado es cierto para $n \geq 2$ fija, es decir, supongamos que

$$(F_1)^2 + (F_2)^2 + \cdots + (F_n)^2 = F_n \cdot F_{n+1}.$$

Paso inductivo. Demostremos que el resultado es cierto para $n+1$, es decir, probemos que

$$(F_1)^2 + (F_2)^2 + \cdots + (F_n)^2 + (F_{n+1})^2 = F_{n+1} \cdot F_{(n+1)+1} = F_{n+1} \cdot F_{n+2}.$$

Procedemos a la prueba. Para ello, observamos que

$$
\begin{aligned}
(F_1)^2 + (F_2)^2 + \cdots + (F_n)^2 + (F_{n+1})^2 &= F_n \cdot F_{n+1} + (F_{n+1})^2 \qquad (4) \\
&= F_{n+1}\left(F_n + F_{n+1}\right) \\
&= F_{n+1} \cdot F_{n+2} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

donde 4 se obtiene a partir de la hipótesis de inducción y 5 se sigue a partir de la definición de la sucesión de Fibonacci. Esto termina la prueba. □

Ejercicio 3. *Sea a_1, a_2, a_3, … una sucesión de números reales* ***positivos*** *que satisface*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^3 = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2$$

para todo entero positivo n. Demuestre que $a_n = n$ para toda $n \geq 1$.

Demostración. Haremos la prueba por inducción sobre n.

Base de inducción. Supongamos que $n = 1$. Por un lado tenemos que

$$\sum_{j=1}^{1} a_j^3 = a_1^3,$$

mientras que por otro

$$\left(\sum_{j=1}^{1} a_j\right)^2 = (a_1)^2 .$$

Entonces $a_1^3 = a_1^2$, y como $a_1 > 0$ por hipótesis, al dividir ambos términos por a_1^2 obtenemos que $a_1 = 1$. Esto termina la base inducción.

Hipótesis de inducción. Supongamos que el resultado es cierto para toda $1 \leq k \leq n$ con $n \geq 1$ fijo, es decir, supongamos que $a_k = k$ para toda $1 \leq k \leq n$.

Paso inductivo. Demostremos que el resultado es cierto para $n + 1$, esto es, probemos que $a_{n+1} = n + 1$.

Notemos que por un lado tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n+1} a_j^3 &= \sum_{j=1}^{n} a_j^3 + a_{n+1}^3 && (6)\\
&= \sum_{j=1}^{n} j^3 + a_{n+1}^3 && (7)\\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + a_{n+1}^3 && (8)
\end{aligned}$$

donde 6 se obtiene por propiedades de la notación sigma, 7 se sigue por la hipótesis de inducción, pues estamos sustituyendo todos los a_j's por su respectivo valor j, y finalmente 8 se obtiene usando el Ejercicio 1 de la Sección 2 de la Tarea 1.

Ahora, por otro lado,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n+1} a_j\right)^2 &= \left(\sum_{j=1}^{n} a_j + a_{n+1}\right)^{n+1} && (9)\\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} j + a_{n+1}\right)^2 && (10)\\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2} + a_{n+1}\right)^2 && (11)\\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + n(n+1)a_{n+1} + a_{n+1}^2 && (12)
\end{aligned}$$

donde 9 se obtiene por las propiedades de la notación sigma, 10 se sigue a partir de la hipótesis de inducción, y 11 se obtiene por el Ejercicio 1 de la Sección 2 de la Tarea 1.

Luego, por la hipótesis general, se tiene que 8 y 12 son iguales, es decir,

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + a_{n+1}^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + n(n+1)a_{n+1} + a_{n+1}^2$$

de donde obtenemos que

$$a_{n+1}^3 - a_{n+1}^2 - n(n+1)a_{n+1} = 0,$$

o bien, luego de dividir entre a_{n+1} porque $a_{n+1} > 0$ por hipótesis,

$$a_{n+1}^2 - a_{n+1} - n(n+1) = 0$$

y al factorizar resulta

$$(a_{n+1} + n)\left(a_{n+1} - (n+1)\right) = 0.$$

Observamos que se trata de una ecuación cuadrática, por lo cual tenemos dos posibles soluciones $a_{n+1} = -n$ o bien $a_{n+1} = n + 1$. Como por hipótesis se tiene que $a_{n+1} > 0$, entonces descartamos la solución $a_{n+1} = -n < 0$ y por lo tanto se cumple que $a_{n+1} = n + 1$. Esto termina la prueba. □

Ejercicio 4. *Pruebe que el número* $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ *es irracional.*

Demostración. Por contradicción. Supongamos que $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ es un número racional, es decir, supongamos que existen $a, b \in \mathbb{Z}$ con $mcd(a, b) = 1$ tales que

$$\sqrt{5} + \sqrt{7} = \frac{a}{b}.$$

Entonces $\sqrt{5} = \frac{a}{b} - \sqrt{7}$, de donde se sigue que

$$5 = \left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(\frac{a}{b} - \sqrt{7}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} - \frac{2a\sqrt{7}}{b} + 7,$$

a partir de esto se sigue que

$$\frac{a^2}{b^2} + 2 = \frac{2a\sqrt{7}}{b},$$

y entonces

$$a^2 + 2b^2 = 2ab\sqrt{7}.$$

Nuevamente, elevar al cuadrado ambos términos obtenemos que

$$a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 = 28a^2b^2$$

de donde

$$a^4 - 24a^2b^2 + 4b^4 = 0 \tag{13}$$

Notamos que lo anterior implica que 2 divide a a^4 pues 2 divide a $-26a^2b^2$, a $4b^4$ y a 0. Ahora, esto implica que 2 divide a a porque 2 es un número primo. Por esto, existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2p$, a partir de lo cual se obtiene que la ecuación 13 se convierte en

$$16p^4 - 4(24)p^2b^2 + 4b^4 = 0,$$

o bien, dividiendo toda la expresión entre 4,

$$4p^4 - 24p^2b^2 + b^4 = 0.$$

Lo anterior implica que 2 divide a b^4, de donde se sigue que 2 divide a b, pero esto contradice que a y b no tienen factores en común (nuestra hipótesis era que $mcd(a, b) = 1$). Por lo tanto, $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ es un número irracional. Esto termina la prueba. □