Cálculo diferencial e integral I
Ayudantía 05

Ejercicio 1. *Sea* $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. *Halle el valor de las siguientes expresiones.*

(i) $f\left(f(x)\right)$

(ii) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(iii) $f(cx)$

(iv) $f(x+y)$

(v) $f(x)+f(y)$

(vi) *¿Para qué números c existe un número x tal que $f(cx) = f(x)$?*

(vii) *¿Para qué números c se cumple que $f(cx) = f(x)$ para dos números x distintos?*

Demostración. (i) Basta observar que

$$f\left(f(x)\right) = f\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}} = \frac{1}{\frac{1+x}{1+x}+\frac{1}{1+x}} = \frac{1}{\frac{2+x}{1+x}} = \frac{1+x}{2+x}$$

¿Para qué valores tiene sentido la expresión anterior?

(ii) Notamos que

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x}{x+1}.$$

(iii) Tenemos que

$$f\left(cx\right) = \frac{1}{1+cx}.$$

(iv) Notamos que

$$f(x+y) = \frac{1}{1+(x+y)} = \frac{1}{1+x+y}.$$

(v) Observamos que

$$f(x)+f(y) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y}.$$

(vi) Ya que nos interesa que para $c \in \mathbb{R}$ exista x tal que $f(cx) = f(x)$, entonces queremos que

$$\frac{1}{1+cx} = \frac{1}{1+x}.$$

Ya que cx y x son puntos en el dominio, entonces $1+cx \neq 0 \neq 1+x$, por lo cual, al tomar inversos multiplicativos obtenemos que

$$1+cx = 1+x$$

de donde

$$cx - x = 0$$

esto es,

$$x(c-1) = 0$$

Por lo anterior, tenemos dos posibilidades: $x = 0$ o bien $c = 1$. De hecho, notemos que si $c = 0$, basta tomar $x = 0$ para que la igualdad deseada también se cumpla.

(VII) Notamos que $f(cx) = f(x)$ implica, de acuerdo al desarrollo del inciso (VI) anterior, que $cx = x$. En particular, por la condición que se pide, debe cumplirse al menos para algún $x \neq 0$, pero ello implica que $c = 1$. Por lo tanto, el único valor c que cumple la condición es $c = 1$. $\square$

Ejercicio 2. *Halle el dominio de las funciones definidas por las siguientes fórmulas:*

(I) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

(II) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$

Demostración. (I) Vemos que la función f está definida donde la raíz cuadrada tenga sentido, esto es, para valores mayores o iguales a cero, por lo cual debe cumplirse que

$$1 - x^2 \geq 0,$$

o equivalentemente,

$$(1-x)(1+x) \geq 0$$

La desigualdad anterior tiene solución cuando ambos factores son no negativos porque si multiplicamos un número positivo por un número negativo obtenemos un número negativo. Por esto, tenemos dos casos:

Caso 1. Supongamos que $1 - x \geq 0$ y $1 + x \geq 0$. Entonces $1 \geq x$ y $x \geq -1$. Por lo tanto, el conjunto solución en este caso es

$$\mathscr{C}_1 = (-\infty, 1] \cap [-1, \infty) = [-1, 1]\,.$$

Caso 2. Supongamos que $1 - x \leq 0$ y $1 + x \leq 0$. Se sigue que $1 \leq x$ y $x \leq -1$, de donde el conjunto solución es

$$\mathscr{C}_2 = [1, \infty) \cap (-\infty, -1] = \varnothing$$

A partir de los conjuntos solución anteriores tenemos que el dominio de f es

$$\mathrm{Dom}(f) = [-1, 1] \cup \varnothing = [-1, 1]\,.$$

(II) Observamos que la función f está definida mediante una suma, por lo cual para encontrar su dominio primero hallaremos el dominio de cada sumando y, finalmente, tomaremos la intersección de dichos dominios para obtener el dominio que nos interesa.

Escribamos $f(x) = g(x) + h(x)$ donde $g(x) = \frac{1}{x-1}$ y $h(x) = \frac{1}{x-2}$, respectivamente. Tenemos que g está definida en valores donde el denominador es distinto de cero, es decir, cuando $x - 1 \neq 0$, o bien, $x \neq 1$, por lo cual obtenemos que $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. De manera análoga tenemos que h está definida cuando el denominador es distinto de cero, es decir, cuando $x-2\neq 0$, o sea, $x\neq 2$, por lo cual $\mathrm{Dom}(g)=\mathbb{R}\setminus\{2\}=(-\infty,2)\cup(2,\infty)$. Finalmente,

$$\mathrm{Dom}(f)=\mathrm{Dom}(g)\cap\mathrm{Dom}(h)=(\mathbb{R}\setminus\{1\})\cap(\mathbb{R}\setminus\{2\})=\mathbb{R}\setminus\{1,2\}.$$

□

Ejercicio 3. *Sean* $S(x)=x^2$, $P(x)=2^x$ *y* $s(x)=\mathrm{sen}(x)$. *Halle cada una de las siguientes expresiones.*

(I) $(S\circ P)(y)$

(II) $(S\circ P\circ s)(t)+(s\circ P)(t)$

Demostración. (I) Tenemos que

$$(S\circ P)(y)=S(P(y))=S(2^y)=(2^y)^2\,.$$

(II) Ya que se trata de una suma de funciones, obtendremos primero el valor de cada uno de los sumandos y en el paso final los sumaremos.

Por un lado tenemos que

$$(S\circ P\circ s)(t)=S((P\circ s)(t))=S(P(s(t)))=S(P(\mathrm{sen}(t)))=S\left(2^{\mathrm{sen}(t)}\right)=\left(2^{\mathrm{sen}(t)}\right)^2,$$

y por otro

$$(s\circ P)(t)=s(P(t))=s\left(2^t\right)=\mathrm{sen}\left(2^t\right).$$

Por lo tanto,

$$(S\circ P\circ s)(t)+(s\circ P)(t)=\left(2^{\mathrm{sen}(t)}\right)^2+\mathrm{sen}\left(2^t\right).$$

□

Ejercicio 4. *Una función* f *es* ***par*** *si* $f(x)=f(-x)$ *e* ***impar*** *si* $f(-x)=-f(x)$. *Por ejemplo, las funciones* $f(x)=x^2$ *o* $f(x)=|x|$ *o* $f(x)=\cos(x)$ *son funciones pares, mientras que las funciones* $f(x)=x$ *o* $f(x)=\mathrm{sen}(x)$ *son impares. Determine si* $f+g$ *es par, impar o ninguna de las dos, en los cuatro casos obtenido al elegir* f *par o impar, y* g *par o impar.*

Demostración. Tenemos que hay $4=2(2)$ casos, asq́ue analicemos cada uno de ellos.

Caso 1. Supongamos que f y g son ambas funciones pares. Entonces

$$(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=(f+g)(x),$$

y por lo tanto $f+g$ es una función par.

Caso 2. Supongamos que f es par y g impar. Afirmamos que $f+g$ no es par ni impar. Para verlo nos basta con dar un contraejemplo. Consideremos $f(x)=|x|$ y $g(x)=-x$. Supongamos que $x=1$, entonces

$$(f+g)(-1)=|-1|+(-1)=1-1=0,$$

pero

$$(f+g)(1)=|1|+1=1+1=2$$

y

$$-\left(f+g\right)(1)=-2.$$

Por lo tanto, $f+g$ no es par ni impar.

Caso 3. Supongamos que f es impar y g es impar. Este caso es análogo al Caso 2, por lo tanto, $f+g$ no es par ni impar.

Caso 4. Supongamos que f y g son funciones impares. Entonces

$$\left(f+g\right)(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)+\left(-g(x)\right)=-\left(f(x)+g(x)\right)=-\left(f+g\right)(x),$$

y por lo tanto, $f+g$ es una función impar. $\square$