Cálculo diferencial e integral I
Ayudantía 07

Ejercicio 1. *Describa la gráfica de g en términos de la gráfica de f si*

(I) $g(x) = f(x) + c$.

(II) $g(x) = f(x + c)$.

(III) $g(x) = c \cdot f(x)$.

(IV) $g(x) = f(cx)$.

(V) $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

(VI) $g(x) = f(|x|)$.

(VII) $g(x) = |f(x)|$.

(VIII) $g(x) = \text{máx}(f, 0)(x)$.

(IX) $g(x) = \text{mín}(f, 0)(x)$.

(X) $g(x) = \text{máx}(f, 1)(x)$.

Demostración. Tomaremos como base la función f y supondremos que su gráfica es la mostrada en la Figura 1.

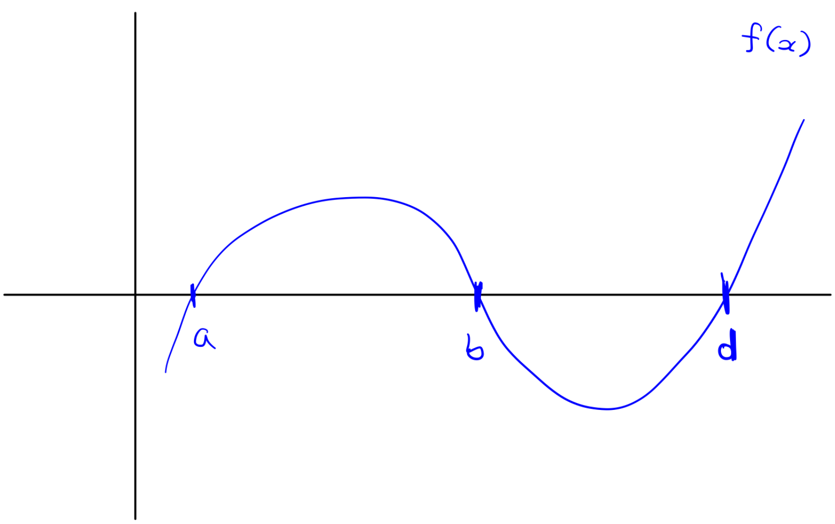

Figura 1: Gráfica de f.

(I) Si $g(x) = f(x) + c$, tenemos 3 casos: si $c = 0$, entonces $g = f$ y la gráfica es la misma; si $c > 0$, entonces la gráfica de g no es más que una traslación en c unidades "hacia arriba" de la gráfica de f, mientras que si $c < 0$, entonces la gráfica de g se obtiene al mover la gráfica de f en $|c|$ unidades hacia abajo. Esto se puede observar en la Figura 2.

(II) Ahora veamos la gráfica de $g(x) = f(x + c)$. En este caso, lo que se está modificando es el dominio, primero nos movemos en el eje X y luego vemos qué valor correponde, por lo cual estamos

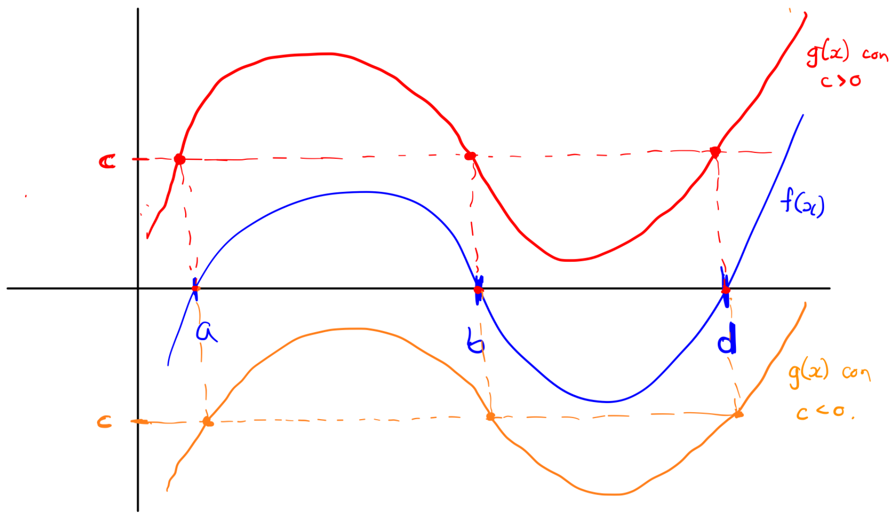

Figura 2: Gráfica de $g(x) = f(x) + c$.

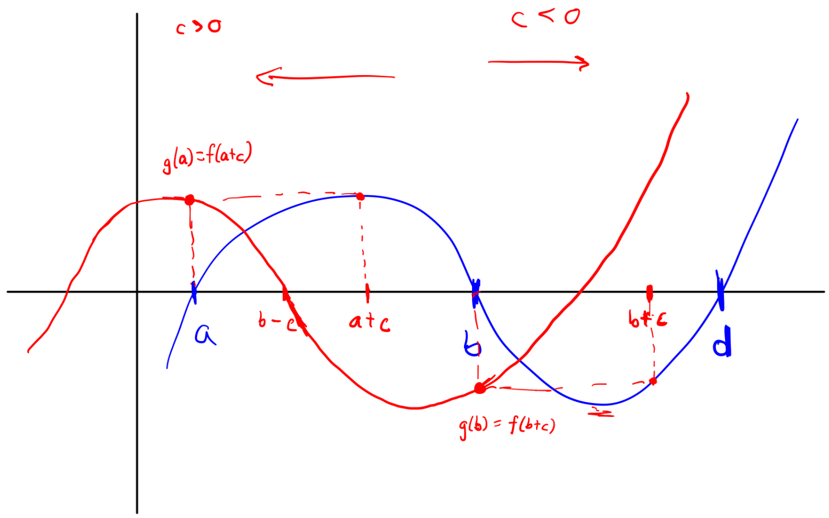

Figura 3: Gráfica de $g(x) = f(x + c)$.

moviendo la gráfica hacia la izquierda o derecha (dependiendo de si $c > 0$ o $c < 0$). Esto se puede observar en la Figura 3.

(III) Consideremos $g(x) = c \cdot f(x)$. Para este inciso tenemos 3 casos, analicemos cada uno de ellos.

Caso 1. Supongamos que $c = 0$. Entonces $g(x) = 0 \cdot f(x) = 0$. La gráfica en este caso se colapsa porque obtenemos la función constante cero. Esto puede verse en la Figura 4.

Caso 2. Supongamos que $c > 0$. Lo que se hace es dejar fijos a los puntos donde la función f originalmente vale cero, y además, se escala el tamaño: si $c < 1$, entonces la gráfica se "achica"; mientras que si $c > 1$, la gráfica se "agranda". Se puede ver esto en la Figura 5.

Caso 3. Supongamos que $c < 0$. Tenemos que hay una reflexión respecto al eje X y luego un escalamiento análogo al caso anterior. Esto se puede ver en la Figura 6.

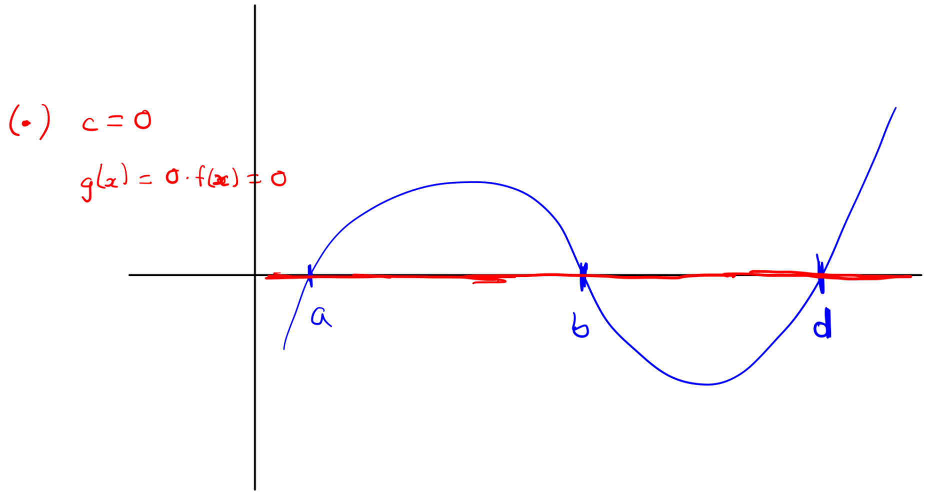

Figura 4: Gráfica de $g(x) = c \cdot f(x)$ con $c = 0$.

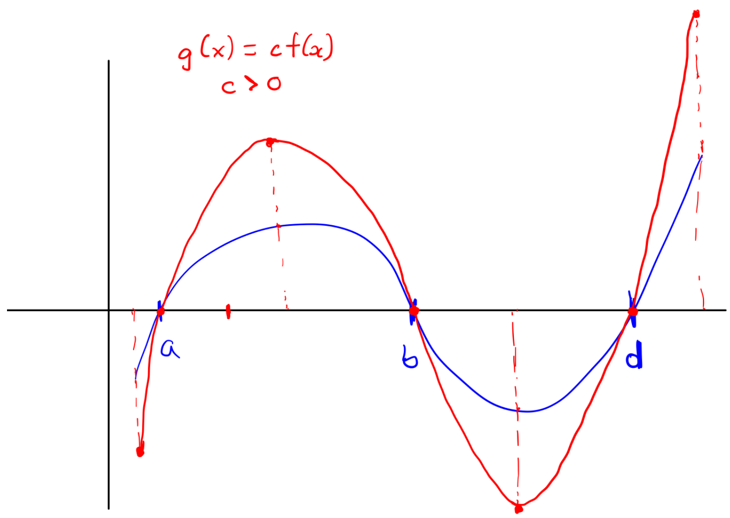

Figura 5: Gráfica de $g(x) = c \cdot f(x)$ con $c > 0$.

(IV) Ahora estudiemos $g(x) = f(cx)$. Nuevamente tenemos 3 casos, así que analicémos cada uno de ellos.

Caso 1. Si $c = 0$, entonces $g(x) = f(0 \cdot x) = f(0)$, con lo cual obtenemos nuevamente una función constante, este vez a la altura $f(0)$. Esto se puede ver en la Figura 7.

Caso 2. Si $c > 0$, entonces estamos recorriendo c veces "más rápido" la función f. Esto se nota en la extensión de la gráfica: se comprime la gráfica si $c > 1$ y se expande si $c < 1$. Esto se observa en la Figura 8.

Caso 3. Si $c < 0$, entonces, además que se recorre más rápido la gráfica, se deben considerar los valores negativos de x en lugar de los positivos, y viceversa, esto es, además hay una reflexión respecto al eje Y. Esto se puede notar en la Figura 9.

(V) Tenemos que la función $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ no está definida en 0. Se puede ver en la Figura 10.

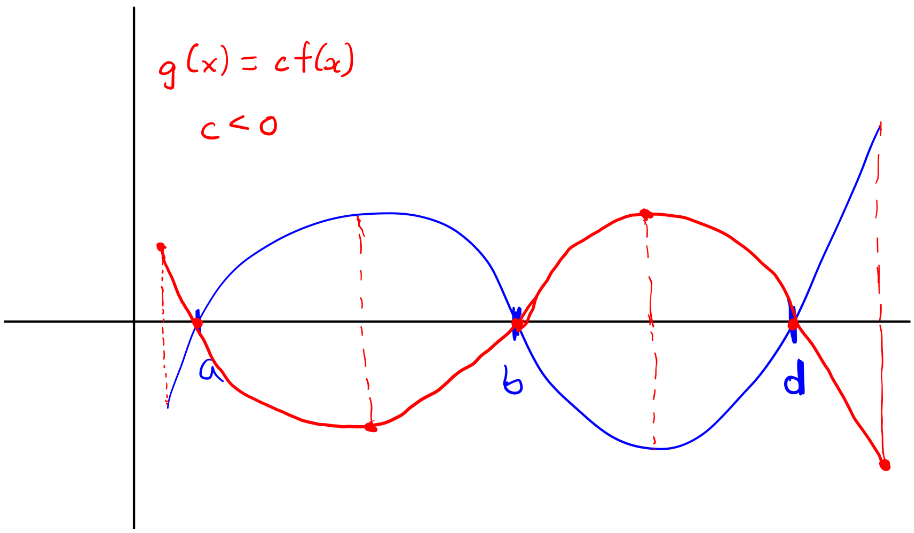

Figura 6: Gráfica de $g(x) = c \cdot f(x)$ con $c < 0$.

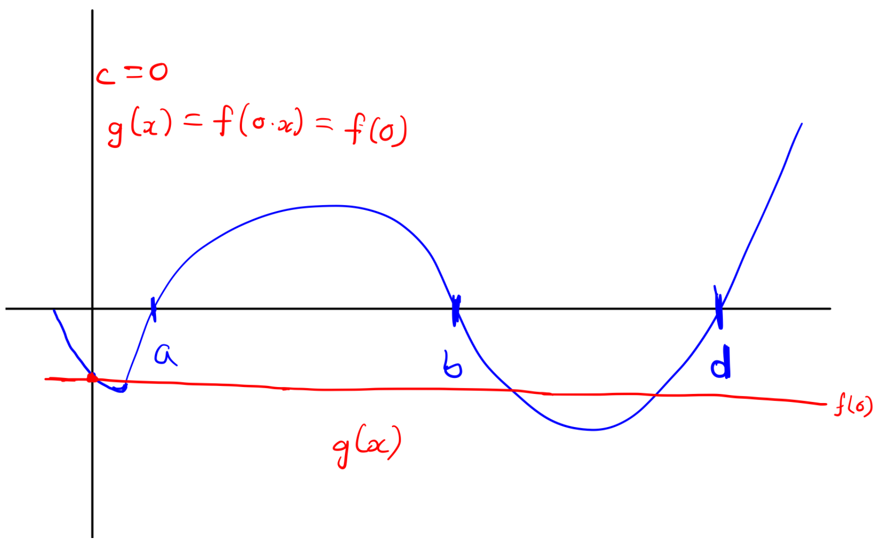

Figura 7: Gráfica de $g(x) = f(cx)$ con $c = 0$.

(VI) Consideremos $g(x) = f(|x|)$. Tenemos dos casos.

Caso 1. Si el dominio de f está contenido en $\mathbb{R}^+$, entonces la gráfica de g coincide con la gráfica de f. Se puede ver en la Figura 11.

Caso 2. Ahora, supongamos que el dominio de f es simétrico respecto al cero. En este caso, para los valores negativos se consideran las imágenes bajo f de sus respectivos valores positivos (su valor absoluto); en la gráfica esto significa que la parte positiva se refleja respecto al eje Y y eso da lugar a la gráfica de g. Esto se puede observar en la Figura 12.

(VII) Tomemos $g(x) = |f(x)|$. En este caso, las imágenes que bajo f son negativas se reflejan respecto al eje X, mientras que las imágenes que bajo f son positivas o cero quedan fijas. Esto se puede notar en la Figura 13.

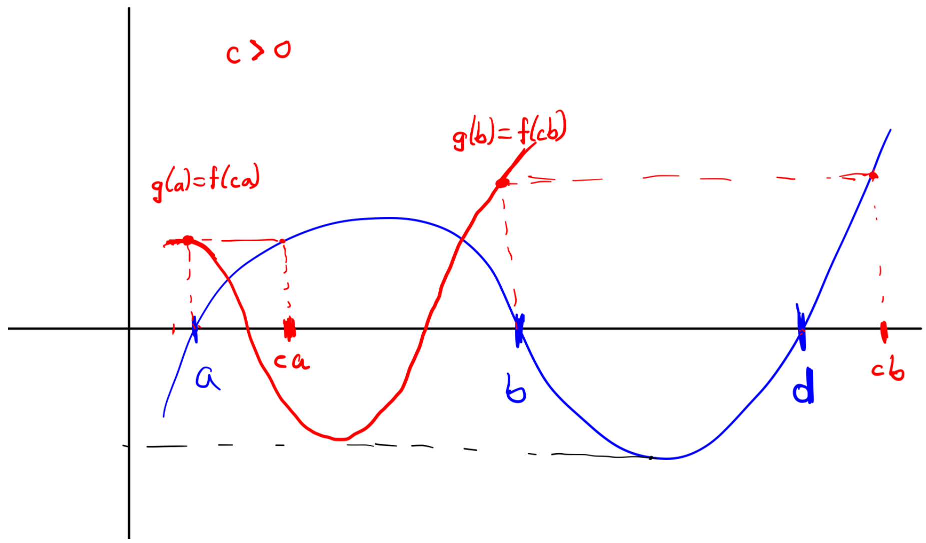

Figura 8: Gráfica de $g(x) = f(cx)$ con $c > 0$.

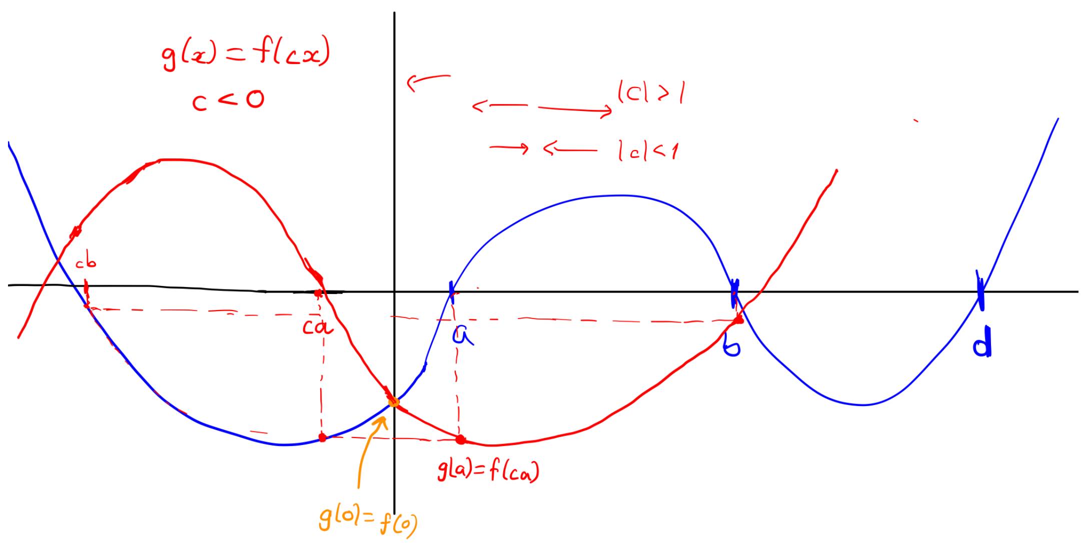

Figura 9: Gráfica de $g(x) = f(cx)$ con $c < 0$.

(VIII) Sea $g(x) = \max(f, 0)(x)$. En este caso, los valores que bajo f son mandados a valores negativos se "colapsan" al cero, mientras que las imágenes no negativas se mantienen fijas. Este fenómeno se puede observar en la Figura 14.

(IX) Sea $g(x) = \min(f, 0)(x)$. En este caso, las imágenes positivas bajo f son "colapsadas" al cero, mientras que los valores no positivos quedan fijos. Esto se aprecia en la Figura 15.

(X) Sea $g(x) = \max(f, 1)(x)$. Ahora, las imágenes que sean menores que 1 son enviadas al 1, así que la gráfica de g se encuentra "por arriba" de la recta $y = 1$. Esto se puede observar en la Figura 16. $\square$

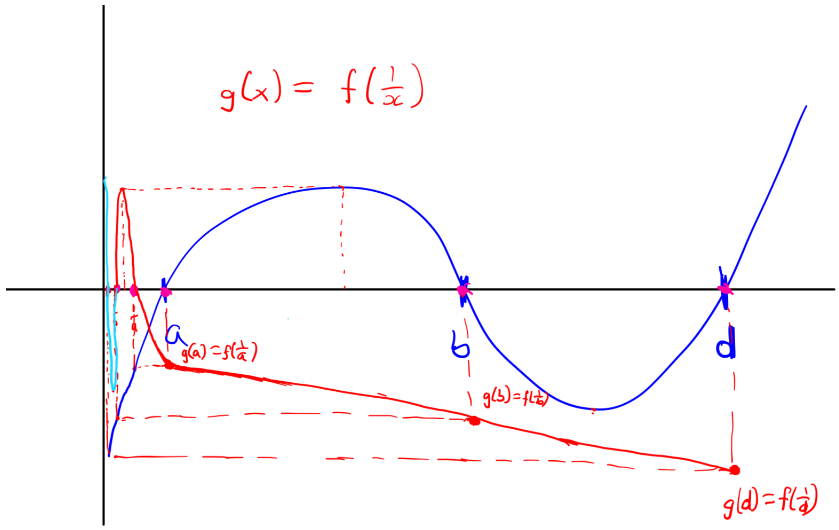

Figura 10: Gráfica de $g(x) = c \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$.

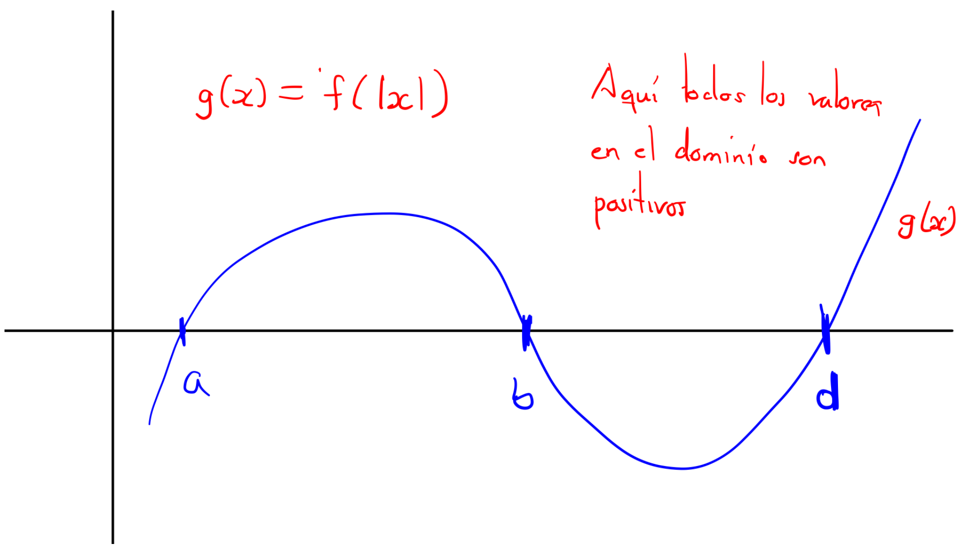

Figura 11: Gráfica de $g(x) = f(|x|)$ con $\mathrm{Dom}(f) \subset \mathbb{R}^+$.

Ejercicio 2. *Denotemos por* $\lfloor x \rfloor$ *al mayor entero menor o igual que* x*, y llamamos a este número* ***la parte entera*** *de* x*. Así,* $\lfloor 2.1 \rfloor = \lfloor 2 \rfloor = 2$ *y* $\lfloor -0.9 \rfloor = \lfloor -1 \rfloor = -1$*. Dibuje la gráfica de las siguientes funciones.*

(I) $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

(II) $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

(III) $f(x) = \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

(IV) $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

(V) $f(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.

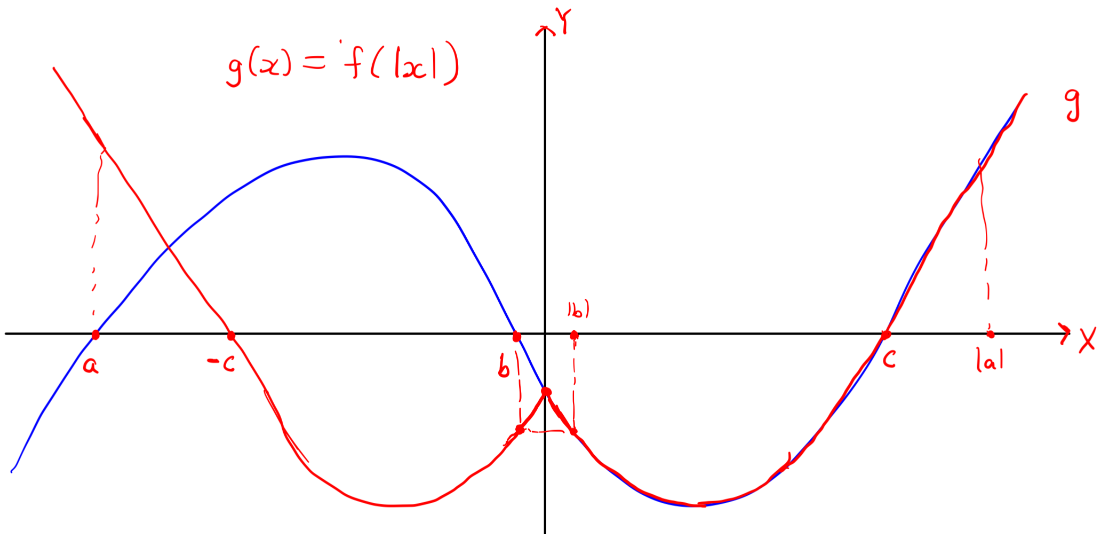

Figura 12: Gráfica de $g(x) = f(|x|)$ con $\mathrm{Dom}(f)$ simétrico respecto al cero.

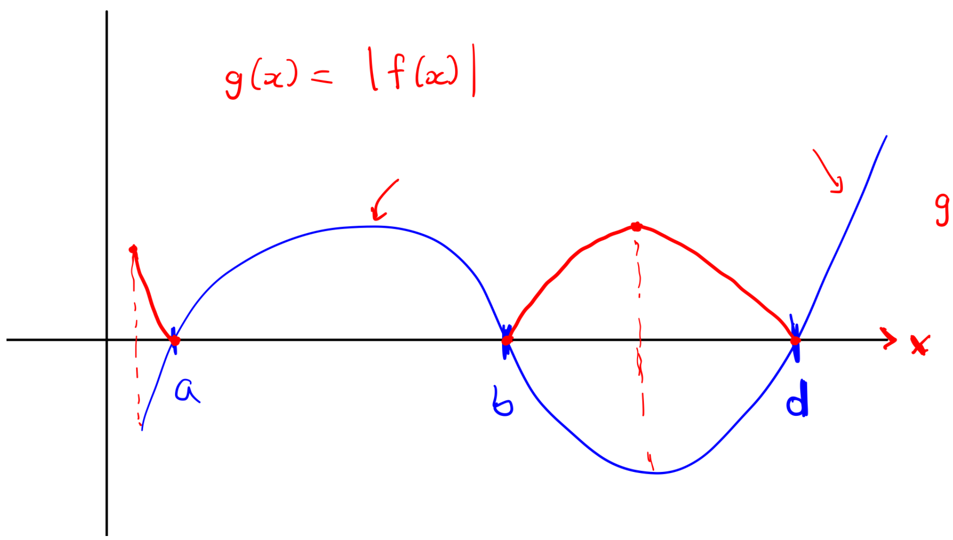

Figura 13: Gráfica de $g(x) = |f(x)|$.

*(*VI*)* $f(x) = \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}$.

Demostración. (I) La gráfica de $f(x) = \lfloor x \rfloor$ se puede ver en la Figura 17.

(II) Tenemos que si $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$, entonces al quitar a cada número su parte entera, únicamente nos queda la parte decimal, ello explica la Figura 18.

(III) Si $f(x) = \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$, en virtud del inciso anterior (II), únicamente tenemos que calcular la raíz cuadrada de la parte decimal en cada subintervalo, por lo cual su gráfica puede verse en la Figura (III).

(IV) Si $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$, entonces únicamente tenemos que mover cada imagen dada en el inciso (III) anterior a cada uno de los niveles dados en el inciso (I). Esto se puede observar en la

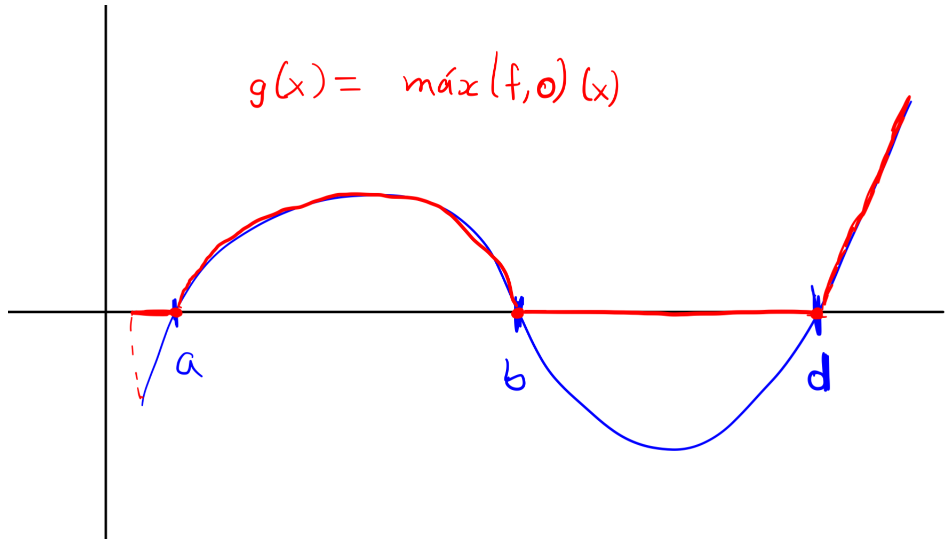

Figura 14: Gráfica de $g(x) = \text{máx}(f, 0)(x)$.

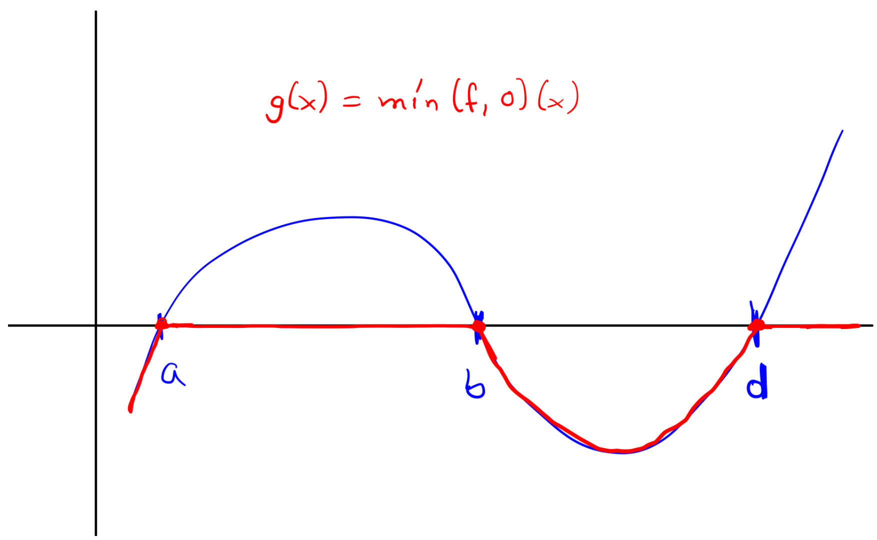

Figura 15: Gráfica de $g(x) = \text{mín}(f, g)(x)$.

Figura 20.

(V) Sea $f(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$. Tenemos que la gráfica está da en ilustrada en la Figura 21.

(VI) Sea $f(x) = \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor}$. Su gráfica se esboza en la Figura 22. $\square$

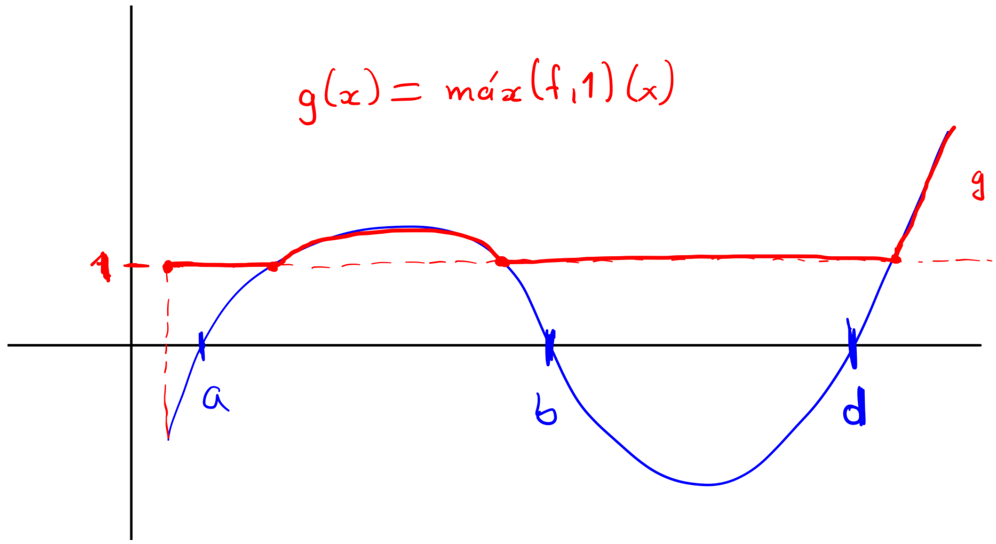

Figura 16: Gráfica de $g(x) = \text{máx}(f, 1)(x)$.

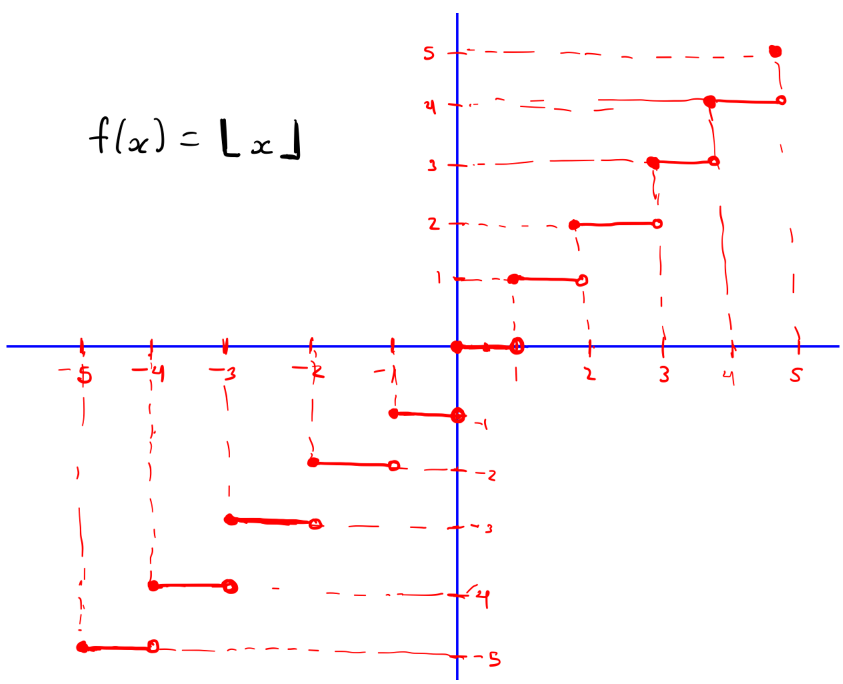

Figura 17: Gráfica de $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

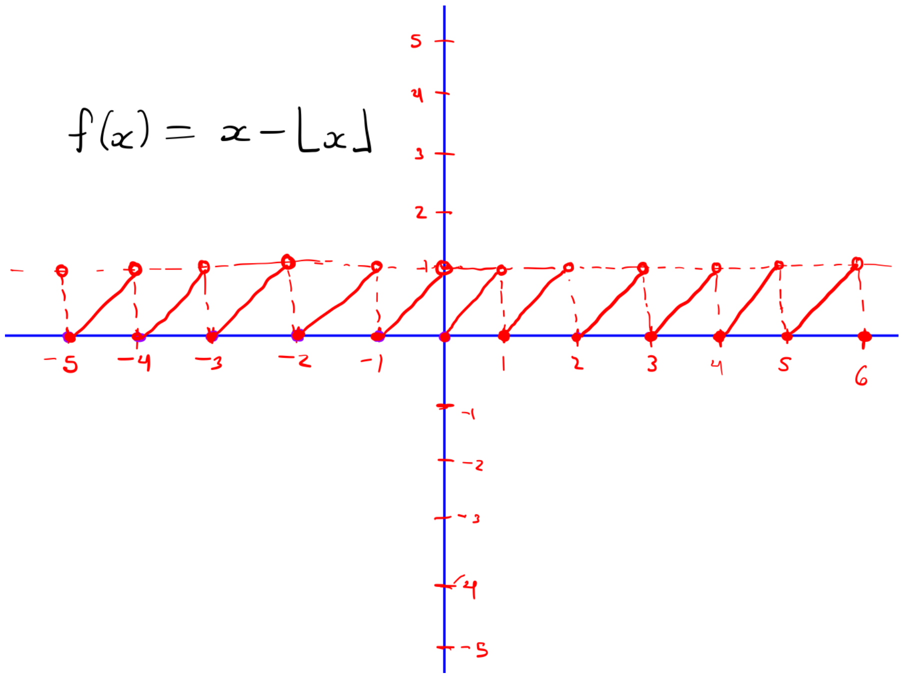

Figura 18: Gráfica de $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

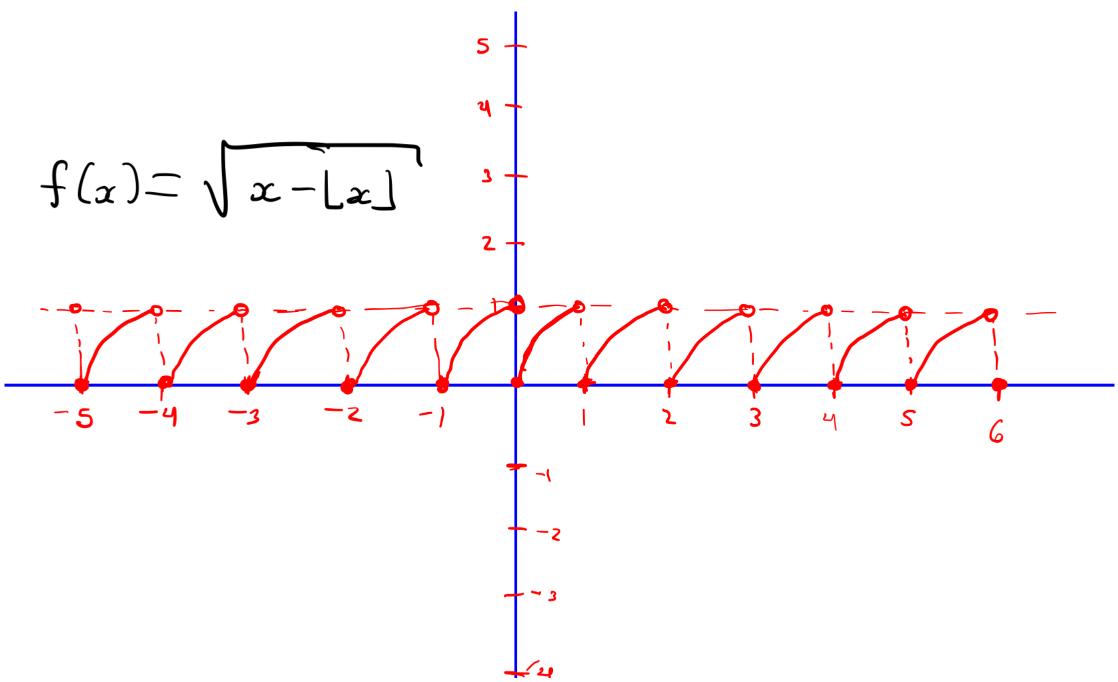

Figura 19: Gráfica de $f(x) = \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

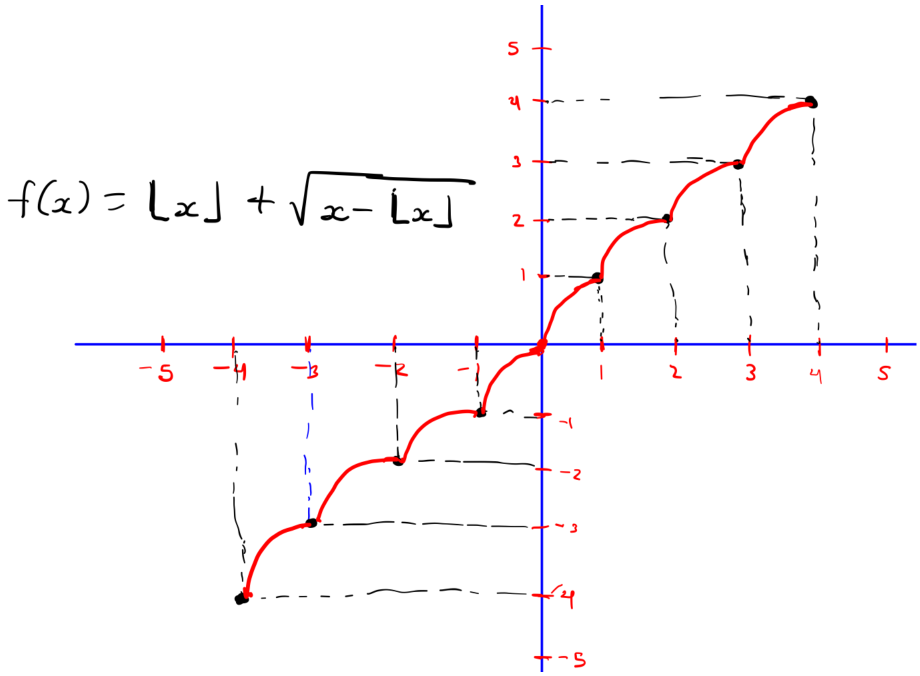

Figura 20: Gráfica de $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

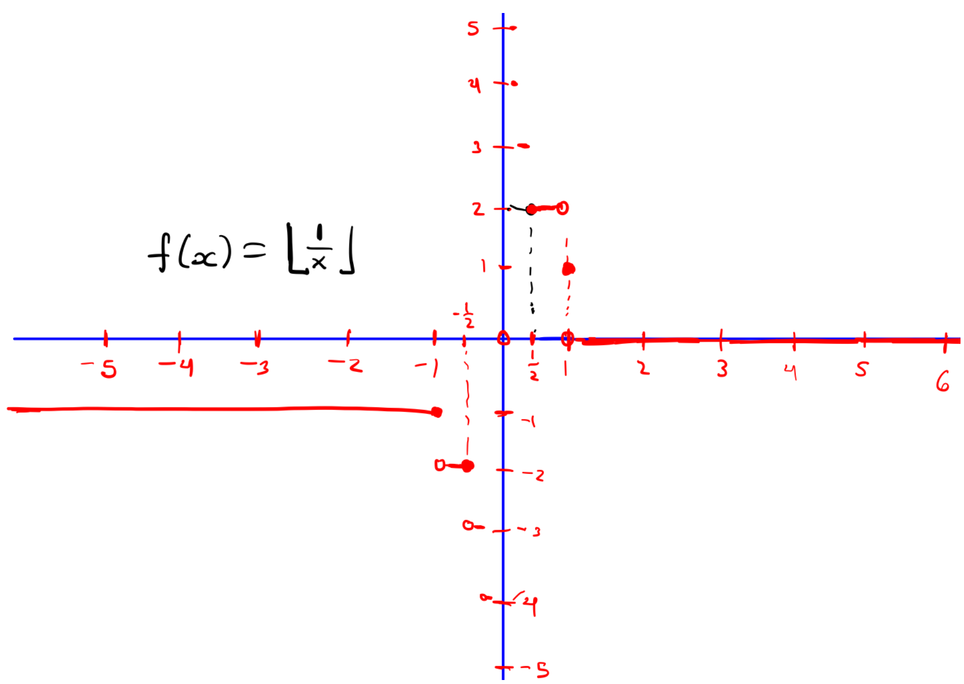

Figura 21: Gráfica de $f(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.

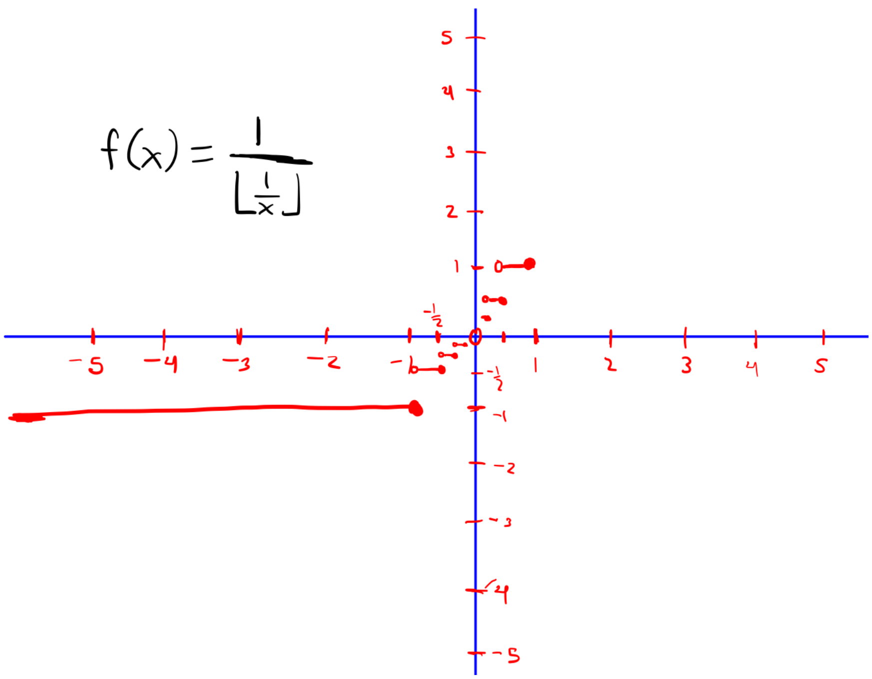

Figura 22: Gráfica de $f(x) = \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}$.