Cálculo diferencial e integral I
Ayudantía 08

Ejercicio 1. *Halle el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos (cuando dichos valores existan). Además, decida cuáles de ellos tienen elemento máximo y elemento mínimo.*

(I) $\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

(II) $\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}$

Demostración. (I) Denotemos $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. Afirmamos que A es acotado superiormente. Para verlo, tenemos que 1 es una cota superior pues si $n \in \mathbb{N}$, entonces $1 \leq n$, de donde $\frac{1}{n} \leq 1$. También, A es acotado inferiormente, para ello basta ver que 0 es una cota inferior de A porque para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $0 < n$, lo cual implica que $0 < \frac{1}{n}$. Ya que $1 \in A$ porque $1 \in \mathbb{N}$ y $\frac{1}{1} = 1$, obtenemos que $A \neq \varnothing$. Así, en virtud del Axioma del supremo y el Teorema del ínfimo obtenemos que existen $\sup(A)$ e $\inf(A)$.

Afimación 1. $\sup(A) = 1$.
Ya tenemos que 1 es cota superior de A. Ahora, sea $y \in \mathbb{R}$ otra cota superior de A. Queremos demostrar que $1 \leq y$. Por contradicción, supongamos que $y < 1$. Ya que y es cota superior de A, entonces para toda $x \in A$ se tiene que $x \leq y$, pero esto implica que $1 \leq y$, lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto, $y \leq 1$. Entonces, por definición de supremo obtenemos que $\sup(A) = 1$.

Afirmación 2. $\inf(A) = 0$.
Ya vimos que 0 es una cota inferior de A. Sea $z \in \mathbb{R}$ otra cota inferior de A. Queremos ver que $z \leq 0$. Procedemos por contradicción. Supongamos que $0 < z$. Entonces, por la propiedad arquimediana existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < z$, pero $\frac{1}{n_0} \in A$, lo cual contradice que z es una cota inferior de A. Por lo tanto, $z \leq 0$. Por lo tanto, $\inf(A) = 0$.

A partir de la Afirmación 1 obtenemos que A tiene máximo porque $1 = \sup(A) \in A$. Entonces, por definición de máximo tenemos que $\max(A) = 1$. Por otro lado, como $0 \notin A$, entonces, por defininción de mínimo, A no tiene mínimo.

(II) Denotemos $B = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}$. Notamos que B es acotado superiormente por 1, para mostrarlo, notamos que si $n \in \mathbb{Z}$ y $n > 0$ entonces $1 \leq n$, de donde $\frac{1}{n} \leq 1$, mientras que si $n < 0$, entonces $\frac{1}{n} < 0 < 1$. Por lo tanto, 1 es cota superior de B. Además, -1 es cota inferior de B ya que si $n \in \mathbb{Z}$ y $n > 0$, entonces $\frac{1}{n} > 0 > -1$, mientras que si $n < 0$ entonces $n \leq -1$, de donde $-1 \leq \frac{1}{n}$. Por lo tanto, -1 es una cota inferior de B. Ahora, como $1 = \frac{1}{1} \in B$, tenemos que $B \neq \varnothing$, así que por el Axioma del supremo y el Teorema del ínfimo obtenemos que existen $\sup(B)$ e $\inf(B)$, respectivamente.

Afirmación 1. $\sup(B) = 1$.
Sea $y \in \mathbb{R}$ otra cota superior de B, queremos demostrar que $1 \leq y$. Procedemos por contradicción. Supongamos que $y < 1$. Como y es cota superior de B, entonces $x \leq y$ para toda $x \in B$, pero $1 \in B$, lo cual implica que $1 \leq y$, y esto es una contradicción. Por lo tanto, $1 \leq y$. Luego, por definición de supremo obtenemos que $\sup(B) = 1$.

Afirmación 2. $\inf(B) = -1$.
Sea $z \in \mathbb{R}$ otra cota inferior de B. Queremos probar que $z \leq -1$. Por contradicción. Supongamos que $-1 < z$. Ahora, como z es cota inferior de B se cumple que $z \leq x$ para toda $x \in B$, pero

$-1 = \frac{1}{-1} \in B$, de donde se sigue que $z \leq -1$, pero esto contradice la hipótesis. Por lo tanto, $z \leq -1$. Entonces $\inf(B) = -1$ por definición de ínfimo.

Ya que $\sup(B) = 1 \in B$ e $\inf(B) = -1 \in B$, obtenemos por definición de máximo y mínimo que B posee máximo y mínimo y además $\max(B) = 1$ y $\min(B) = -1$. $\square$

Ejercicio 2. *(I) Suponga que $y - x > 1$. Demuestre que existe un entero k tal que $x < k < y$. Indicación: Sea l el mayor entero que satisface $l \leq x$ y considere $l + 1$.*

(II) Suponga que $x < y$. Demuestre que existe un número racional r tal que $x < r < y$. Indicación: Si $\frac{1}{n} < y - x$, entonces $ny - nx > 1$.

(III) Suponga que $r < s$ son números racionales. Demuestre que existe un número irracional entre r y s. Indicación: Para empezar se sabe que existe un número irracional entre 0 y 1.

(IV) Suponga que $x < y$. Demuestre que existe un número irracional entre x y y. Indicación: Esto es consecuencia de los incisos (II) y (III).

Demostración. (I) Supongamos que $y - x > 1$. Entonces $y > x + 1$. Sea $\ell = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$. Entonces $\ell \leq x$ y luego $x < \ell + 1$, ya que en caso contrario ℓ no sería la parte entera de x. Finalmente, notemos que

$$x < \ell + 1 < x + 1 < y,$$

así que basta tomar $k = \lfloor x \rfloor + 1$.

(II) Supongamos que $x < y$. Entonces $0 < y - x$, así que por la propiedad arquimediana existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < y - x$. Lo anterior implica que $1 < n_0(y - x) = n_0 y - n_0 x$. Ahora, en virtud del inciso (I) anterior existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n_0 x < k < n_0 y$. Luego, al multiplicar la cadena de desigualdades obtenemos que

$$x < \frac{k}{n_0} < y.$$

Así, basta tomar $r = \frac{k}{n_0}$. Esto prueba lo deseado.

(III) Supongamos que $r < s$ con r y s números racionales. Ya sabemos que $1 < \sqrt{2} < 2$ y que $\sqrt{2}$ es un número irracional. Entonces $\frac{1}{\sqrt{2}} > 0$ también es un número irracional. Lo anterior implica que $\frac{x}{\sqrt{2}} < \frac{y}{\sqrt{2}}$ y, en virtud del inciso (II), existe $k \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\frac{r}{\sqrt{2}} < k < \frac{s}{\sqrt{2}},$$

así que al multiplicar por $\sqrt{2} > 0$ obtenemos que

$$r < k\sqrt{2} < s.$$

Como $k \in Q$ y $\sqrt{2}$ es irracional, obtenemos que $k\sqrt{2}$ es un número irracional, así, entre r y s existe un número irracional.

(IV) Supongamos que $x < y$. Entonces por el inciso (II) existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$. Ahora, como $r < y$, a partir de ese mismo inciso obtenemos que existe $s \in \mathbb{Q}$ tal que $r < s < y$. Luego, como $r < s$ con ambos números racionales, entonces por el inciso (III) anterior, existe t número irracional tal que $r < t < s$, esto es

$$x < r < t < s < y,$$

y por lo tanto t es un número irracional que cumple

$$x < t < y.$$

Esto prueba lo deseado. □

Observación 3. Las propiedades demostradas en el Ejercicio 2 anterior tienen un nombre: la propiedad del inciso (II), es decir, que entre cualesquiera dos números reales distintos existe un número racional, se conoce como **densidad de los números racionales** dentro de los números reales; mientras que la propiedad del inciso (IV), esto es, que entre cualesquiera dos números reales distintos existe un número irracional , se conoce como **densidad de los número irracionales** dentro de los números reales.