Cálculo diferencial e integral I
Ayudantía 09

Lema 1. *Sean $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente, y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se cumple que $\alpha = \sup(A)$ si y sólo si α es cota superior de A y para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que*

$$\alpha - \varepsilon < x \leq \alpha.$$

Demostración. Para la primera implicación supongamos que $\alpha = \sup(A)$. Por hipótesis, α es una cota superior. Para la segunda parte procedemos por contradicción. Supongamos que para toda $x \in A$ se cumple que $x \leq \alpha - \varepsilon < \alpha$. Entonces $\alpha - \varepsilon$ es una cota superior de A que es menor que α, pero esto contradice la definición de supremo. Por lo tanto, existe $x \in A$ tal que $\alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$.

Para la segunda implicación supongamos que α es una cota superior de A y para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que $\alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$. Para ver que $\alpha = \sup(A)$ resta probar que si $y \in \mathbb{R}$ es otra cota superior de A, entonces $\alpha \leq y$. Así, sea y otra cota superior de A. Procedemos por contradicción, supongamos que $y < \alpha$, entonces $\varepsilon_0 = \alpha - y > 0$, así que existe $x_0 \in A$ tal que

$$y = \alpha - (\alpha - y) = \alpha - \varepsilon_0 < x_0 \leq \alpha,$$

de donde $y < x_0$ y $x_0 \in A$, lo que contradice que y es cota superior de A. Por lo tanto, $\alpha \leq y$. Finalmente, por la unicidad del supremo obtenemos que $\sup(A) = \alpha$. □

A continuación enunciamos la versión análoga del resultado anterior para el caso del ínfimo. La prueba de este lema queda como ejercicio para el lector.

Lema 2. *Sean $B \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado inferiormente, y $\beta \in \mathbb{R}$. Se cumple que $\beta = \inf(B)$ si y sólo si β es cota inferior de B y para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $x \in B$ tal que*

$$\beta \leq x < \beta + \varepsilon.$$

Demostración. Ejercicio. □

El siguiente resultado será útil en algunas pruebas.

Lema 3. *Si $x \geq 0$ y para toda $\varepsilon > 0$ se cumple que $x \leq \varepsilon$, entonces $x = 0$.*

Demostración. Por contradicción. Supongamos que $x \neq 0$. A partir de la hipótesis se obtiene que $x > 0$. Por la propiedad arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < x$, pero esto contradice que $x \leq \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$. Por lo tanto, $x = 0$. □

Concluimos este sesión con la siguiente proposición.

Proposición 4 (Propiedades del supremo y del ínfimo)**.** *Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos no vacíos y acotados.*

(i) *Si $A \subset B$, entonces* $\inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$.

(ii) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$.

(iii) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf(A), \inf(B)\}$.

(iv) *Si $-A = \{-a \mid a \in A\}$, entonces* $\inf(-A) = -\sup(A)$ *y* $\sup(-A) = -\inf(A)$.

(v) *Si* $A+B=\{a+b \mid a\in A, b\in B\}$*, entonces* $\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$ *y también* $\inf(A+B)=\inf(A)+\inf(B)$*.*

(vi) *Si* $b>0$ *y* $bA=\{ba \mid a\in A\}$*, entonces* $\sup(bA)=b\sup(A)$ *y además* $\inf(bA)=b\inf(A)$*.*

Demostración. (i) Es inmediato a partir de las definiciones de supremo e ínfimo.

(ii) Como A y B son no vacíos, se tiene que $A\cup B$ es no vacío. Ya que A y B son acotados (en particular son acotados superiormente), se sigue que $A\cup B$ es acotado superiormente (¿puede dar un argumento completo de este hecho?). Denotemos $\alpha=\max\{\sup(A),\sup(B)\}$. Claramente α es una cota superior de $A\cup B$: si $x\in A\cup B$, entonces $x\in A$ o $x\in B$; si $x\in A$, entonces $x\leq\sup(A)\leq\alpha$, mientras que si $x\in B$, entonces $x\leq\sup(B)\leq\alpha$. Ahora, si y es cota superior de $A\cup B$, en particular es cota superior de A y de B (¿puede demostrar esto?), así que $y\geq\sup(A)$ y $y\geq\sup(B)$ por definición de supremo, y a partir de esto obtenemos que $y\geq\alpha$. Luego, por la unicidad del supremo, obtenemos que $\sup(A\cup B)=\alpha$.

(iii) La prueba es análoga al inciso anterior.

(iv) La demostración para el ínfimo se hizo en la prueba del Teorema del ínfimo. La prueba para el supremo es análoga.

(v) Denotemos $\alpha=\sup(A)$ y $\beta=\sup(B)$. Por definición de supremo se cumple que $a\leq\alpha$ para toda $a\in A$ y $b\leq\beta$ para toda $b\in B$. A partir de esto, $a+b\leq\alpha+\beta$ para cualesquiera $a\in A$ y $b\in B$, lo cual prueba que $\alpha+\beta$ es una cota superior de $A+B$. Así, $\sup(A+B)\leq\alpha+\beta$.

Veamos que $\sup(A+B)=\alpha+\beta$. Usaremos el Lema 3: probaremos que para toda $\varepsilon>0$ se cumple que $\alpha+\beta\leq\sup(A+B)+\varepsilon$. Sea $\varepsilon>0$. Por el Lema 1, para $\frac{\varepsilon}{2}>0$ existe $x\in A$ tal que $\alpha-\frac{\varepsilon}{2}<x\leq\alpha$ y también existe $y\in B$ tal que $\beta-\frac{\varepsilon}{2}<y\leq\beta$. Esto implica que $\alpha-x<\frac{\varepsilon}{2}$ y $\beta-y<\frac{\varepsilon}{2}$, de donde $\alpha+\beta-x-y<\varepsilon$. Luego, $\alpha+\beta-\varepsilon<x+y\leq\sup(A+B)$, de donde obtenemos que $\alpha+\beta\leq\sup(A+B)+\varepsilon$. Esto prueba que para toda $\varepsilon>0$ se cumple que $\alpha+\beta\leq\sup(A+B)+\varepsilon$, o bien, $\alpha+\beta-\sup(A+B)\leq\varepsilon$ para toda $\varepsilon>0$. Como $\alpha+\beta\geq\sup(A+B)$, entonces $\alpha+\beta-\sup(A+B)\geq 0$, así que por el Lema 3, $\alpha+\beta-\sup(A+B)=0$, es decir, $\alpha+\beta=\sup(A+B)$. Esto termina la prueba.

(vi) Ejercicio. □