Cálculo diferencial e integral I
Ayudantía 10

Ejercicio 1. *Demuestre que:*

(I) *[Límite de una sucesión constante] Sea $c \in \mathbb{R}$ fijo, entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

(II) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

(III) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Demostración. El objetivo de este ejercicio es ilustrar las estrategias para obtener cotas, por lo cual la prueba se hará usando la definición.

(I) Sea $\varepsilon > 0$. Denotemos $a_n = c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$|a_n - c| = |c - c| = |0| = 0 < \varepsilon,$$

por lo cual si $N = 1$ se tiene que para toda $n \geq N$ se satisface que

$$|a_n - c| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

(II) Sea $\varepsilon > 0$. Notamos que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}.$$

Ahora, por la propiedad arquimediana, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N_0+1} < \varepsilon$. Por lo anterior, si $N = N_0$, entonces para $n \geq N$ se cumple que $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1}$, de donde

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, por definición, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

(III) Notamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{1}{n} < \frac{1}{n}.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces por la propiedad arquimediana existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N_0} < \varepsilon$. Proponemos $N = N_0$. Luego, si $n \geq N$, se cumple que

$$\left|\frac{n!}{n^n} - 0\right| = \frac{n!}{n^n} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Finalmente, por definición se cumple que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$. □

Ejercicio 2. *Demuestre que* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = 0.$

Demostración. Observemos que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\begin{aligned}
\sqrt{n+1}-\sqrt{n} &= \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se obtiene porque $\sqrt{n} \leq \sqrt{n}+\sqrt{n+1}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por la propiedad arquimediana existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N_0} < \varepsilon^2$. Lo anterior implica que $\frac{1}{\sqrt{N_0}} < \varepsilon$. Por lo anterior, proponemos $N = N_0$. Observamos que si $n \geq N$, entonces $\sqrt{n} \geq \sqrt{N}$, de donde

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{N}} < \varepsilon,$$

es decir, si $n \geq N$ entonces

$$\begin{aligned}
|a_n - 0| &= \left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

porque $\left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right| = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ y también $\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ (note que estamos usando las cotas que se calcularon al principio de esta prueba).

Por lo tanto, por definición, la sucesión $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$ converge a 0. $\square$

Ejercicio 3. *Demuestre que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+7n^2+1}{4n^3-8n+63} = \frac{3}{4}.$$

Demostración. Para resolver este ejemplo usaremos del **Teorema 8** de la **Clase 14**. Antes de ello, notemos que para toda $n \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$\begin{aligned}
\frac{3n^3+7n^2+1}{4n^3-8n+63} &= \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}} \cdot \frac{3n^3+7n^2+1}{4n^3-8n+63} \\
&= \frac{3+\frac{7}{n}+\frac{1}{n^3}}{4-\frac{8}{n^2}+\frac{63}{n^3}},
\end{aligned}$$

por lo cual podemos calcular el límite pedido al calcular el límite de la sucesión

$$\left\{\frac{3+\frac{7}{n}+\frac{1}{n^3}}{4-\frac{8}{n^2}+\frac{63}{n^3}}\right\}.$$

Observamos que $\lim_{n\to\infty} 3 = 3$ y $\lim_{n\to\infty} 4 = 4$. Además, obtenemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{7}{n} = 0$ (¿por qué?). Ahora, notemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) = 0$$

Lo anterior implica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$$

y por lo tanto también

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-8}{n^2} = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{63}{n^3} = 0.$$

Notamos que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $4 - \frac{8}{n^2} + \frac{63}{n^3} \neq 0$, y además

$$\lim_{n\to\infty} \left(4 - \frac{8}{n^2} + \frac{63}{n^3}\right) = 4$$

(note que ya hemos calculado los límites de todas las sucesiones que aparecen en dicha suma). Ya que también

$$\lim_{n\to\infty} \left(3 + \frac{7}{n} + \frac{1}{n^3}\right) = 3$$

obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{7}{n} + \frac{1}{n^3}}{4 - \frac{8}{n^2} + \frac{63}{n^3}} = \frac{3}{4}.$$

A partir de la igualdad del principio obtenemos la conclusión deseada, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 + 7n^2 + 1}{4n^3 - 8n + 63} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{7}{n} + \frac{1}{n^3}}{4 - \frac{8}{n^2} + \frac{63}{n^3}} = \frac{3}{4}.$$

□

Ejercicio 4. *Calcule los siguientes límites.*

(I) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n}\right)$.

(II) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}}$.

Demostración. (I) Ya sabemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Ahora, como para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\frac{n}{n+1} \neq 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{1} = 1$$

en virtud del **Teorema 8** de la **Clase 14** (del *álgebra de límites*). Finalmente, a partir de dicho teorema obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n}\right) = 1 - 1 = 0$$

porque ambos límites existen.

(II) Notamos que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\begin{aligned}\frac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}} &= \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} \cdot \frac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}} \\ &= \frac{1 + \frac{(-1)^n}{2^n}}{2 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}}.\end{aligned}$$

Observamos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$$

(demuéstrelo). Notamos que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $2 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \neq 0$, y además por el álgebra de límites tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right) = 2 \neq 0.$$

También se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{2^n}\right) = 1,$$

así que por el **Teorema 8** de la **Clase 14** obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}}\right) = \frac{1}{2}.$$

En conclusión,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

$\square$