Cálculo diferencial e integral I
Ayudantía 14

En esta sesión haremos dos interpretaciones nuevas acerca del comportamiento de funciones: por un lado estudiaremos el comportamiento de los valores que toma f cuando hacemos crecer (o decrecer) los elementos del dominio; por otro lado, también daremos una interpretación de cuando el límite de una función f no existe en un punto x_0, pero el los valores que toma f al aproximarnos a x_0 crecen (o decrecen) sin cota.

1. Límites al infinito

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Pregunta. *¿Cómo se comporta esta función cuando x es un número positivo* muy grande*?*

Antes de intentar responder esta pregunta, precisemos a qué nos estamos refiriendo: cuando se habla de valores positivos *muy grandes* se quiere decir que se consideran valores no acotados (superiormente), por lo cual la función debe estar definida, al menos, en un intervalo de la forma (a, ∞) (para alguna $a \in \mathbb{R}$ fija). Observamos que en nuestro caso, $(1, \infty) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, así que sí se cumple esta condición.

A continuación, procedamos a tratar de responder la pregunta planteada. Notamos que para $x, y > 1$ con $x < y$ se cumple que $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$, así que conforme x es mayor, el valor de $\frac{1}{x}$ *se aproxima* a 0, pero, ¿qué pasa con el valor de $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$? En este momento ya sabemos que $\lim\limits_{z \to 0} \operatorname{sen}(z) = 0$ y, en particular, $\lim\limits_{z \to 0^+} \operatorname{sen}(z) = 0$, y si observamos, *aparentemente* nos estamos acercando a 0 mediante valores mayores que cero, así que parece natural pensar que cuando x crece sin cota los valores de $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ se aproximan también a 0. Vea la Figura 1.

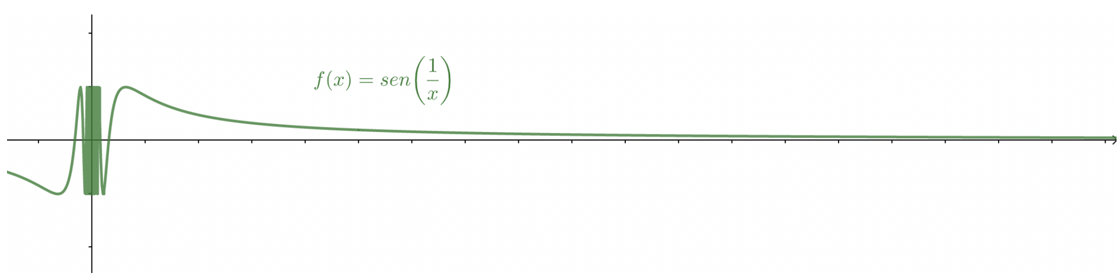

Figura 1: Ilustración de la definición de límite al infinito cuando existe.

Formalicemos esta idea mediante la siguiente definición.

Definición 1 (Límite al infinito)**.** Sean $\ell \in \mathbb{R}$ y $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $(a, \infty) \subset A$ para alguna $a \in \mathbb{R}$ fija. Decimos que **el límite de f cuando x tiende a infinito es ℓ** si para toda $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $x \in (a, \infty)$ cumple que $x > N$ entonces $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. En este caso, lo denotamos como

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell.$$

Es importante notar que en la definición anterior, N depende de ε, pero, de manera similar a lo que sucede en la definición de límite en un punto, no escribimos $N(\varepsilon)$ para no sobrecargar la notación.

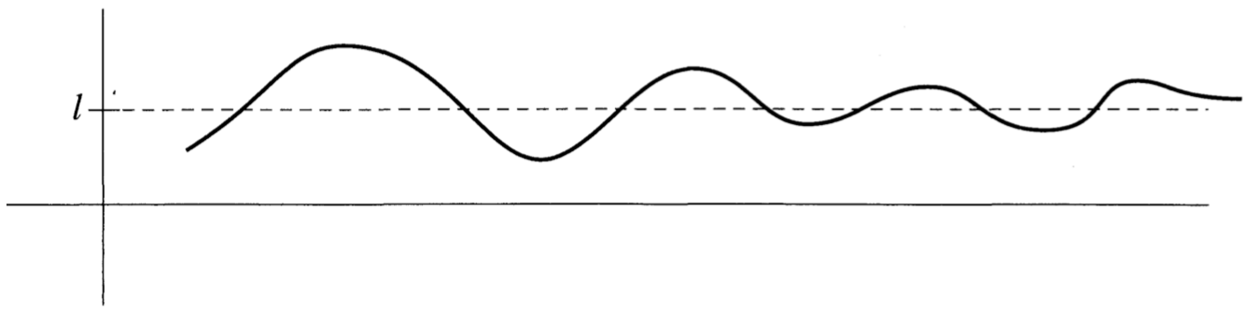

Figura 2: Ilustración de la definición de límite al infinito cuando existe.

Dado el concepto anterior, estamos en condiciones de responder la pregunta planteada al principio de manera precisa.

Ejemplo 2. Se cumple que $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Demostración. Como es de esperarse, usaremos la definición correspondiente. Sea $\varepsilon > 0$. Queremos demostrar que existe $N > 0$ tal que si $x > N$ entonces $\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 0\right| = \left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| < \varepsilon$.

Ya que $\lim\limits_{y\to 0} \operatorname{sen}(y) = 0$, para la $\varepsilon > 0$ dada, existe $\delta_0 > 0$ tal que si $y \in \mathbb{R}$ cumple $0 < |y - 0| = |y| < \delta_0$, entonces $|\operatorname{sen}(y) - 0| = |\operatorname{sen}(y)| < \varepsilon$. Ahora, por la propiedad arquimediana existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N_0} < \delta_0$.

Dado lo anterior, proponemos $N = N_0$. Si $x > N$, entonces

$$0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{N} = \frac{1}{N_0} < \delta_0,$$

es decir,

$$0 < \left|\frac{1}{x}\right| < \delta_0,$$

lo cual implica que

$$\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| < \varepsilon.$$

Esto es justamente lo que queríamos demostrar. Por lo tanto, por definición, $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. $\square$

Observación 3. El ejemplo anterior ilustra cómo aprovechar una definición previa así como un resultado ya demostrado. Esto es una práctica común en matemáticas, donde si bien no se espera que memorice todos los resultados, sí se espera que desarrolle habilidades de razonamiento que le permitan resolver diversos problemas (lo que en muchos lugares llamarán *madurez matemática*).

De manera simétrica nos podemos preguntar qué sucede cuando los valores decrecen sin cota, lo cual nos lleva a la siguiente definición.

Definición 4 (Límite a menos infinito)**.** Sean $\ell \in \mathbb{R}$ y $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $(-\infty, b) \subset A$ para alguna $b \in \mathbb{R}$ fija. Decimos que **el límite de f cuando x tiende a infinito es** ℓ si para toda $\varepsilon > 0$ existe $N < 0$ tal que si $x \in (-\infty, b)$ satisface que $x < N$ entonces $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. En este caso, lo denotamos como

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell.$$

Ejemplo 5. Sea $f : (-\infty, 0) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. Pruebe que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Queremos demostrar que existe $N < 0$ tal que si $x < N$ entonces $|f(x) - 0| < \varepsilon$.

Notamos que para $x \in (-\infty, 0)$ se tiene que

$$|f(x) - 0| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{|1|}{|x|} = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}.$$

También, por la propiedad arquimediana existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N_0} < \varepsilon$. Proponemos $N = -N_0 < 0$. Así, si $x < M$, entonces $0 < N_0 = -N < -x$, de donde obtenemos que $0 < -\frac{1}{x} = \frac{1}{-x} < \frac{1}{N_0} < \varepsilon$, esto es,

$$|f(x) - 0| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, por definición, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$. □

2. Límites infinitos

En esta sección daremos una interpretación a cierto comportamiento que tienen algunas funciones cuando el límite no existe. Esto es importante, a pesar de que usaremos un símbolo que anteriormente puede hacer pensar que el límite existe, en este caso NO lo es, únicamente se trata de un símbolo que permite representar sin confusión el comportamiento de la función.

Para motivar la definición, consideremos la función $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Pregunta. *¿Cómo se comporta f para valores cercanos a 0?*

Notamos que en este caso se puede demostrar que no existe el límite cuando x tiende a 0 (se trata de un buen ejercicio, como sugerencia, revise la prueba de la no existencia del límite de la función $g(x) = \frac{1}{x}$). Sin embargo, notamos que dado $M > 0$, por la propiedad arquimediana existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N_0} < \frac{1}{\sqrt{M}}$, así que si $x \in \mathbb{R}$ cumple que $0 < |x| < \frac{1}{N_0}$, entonces $|x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$, lo cual implica que $\frac{1}{|x|} > \sqrt{M}$, de donde $f(x) = \frac{1}{x^2} > M$, es decir, siempre es posible obtener un intervalo alrededor de 0 de manera que sus imágenes sean mayores que cualquier número dado. Esto se ilustra en la Figura 3.

Definición 6 (Límite infinito)**.** Sean $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $c \in \mathbb{R}$ tal que existe $(a, b) \subset \mathbb{R}$ con $c \in (a, b)$ y $(a, b) \setminus \{c\} \subseteq A$. Decimos que el **límite de f cuando x tiende a c es infinito** si para toda $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (a, b)$ cumple que $0 < |x - c| < \delta$, entonces $f(x) > M$. En este caso, usamos la notación

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty.$$

Observación 7. Recuerde que el símbolo ∞ no denota ningún número, sino que representa que no hay cota superior para los número considerados. Como ya se dijo, en este caso no existe el límite y únicamente estamos dando una interpretación del comportamiento de la función f en puntos cercanos a c.

Usamos la definición anterior para formalizar el resultado mostrado al inicio de la sección.

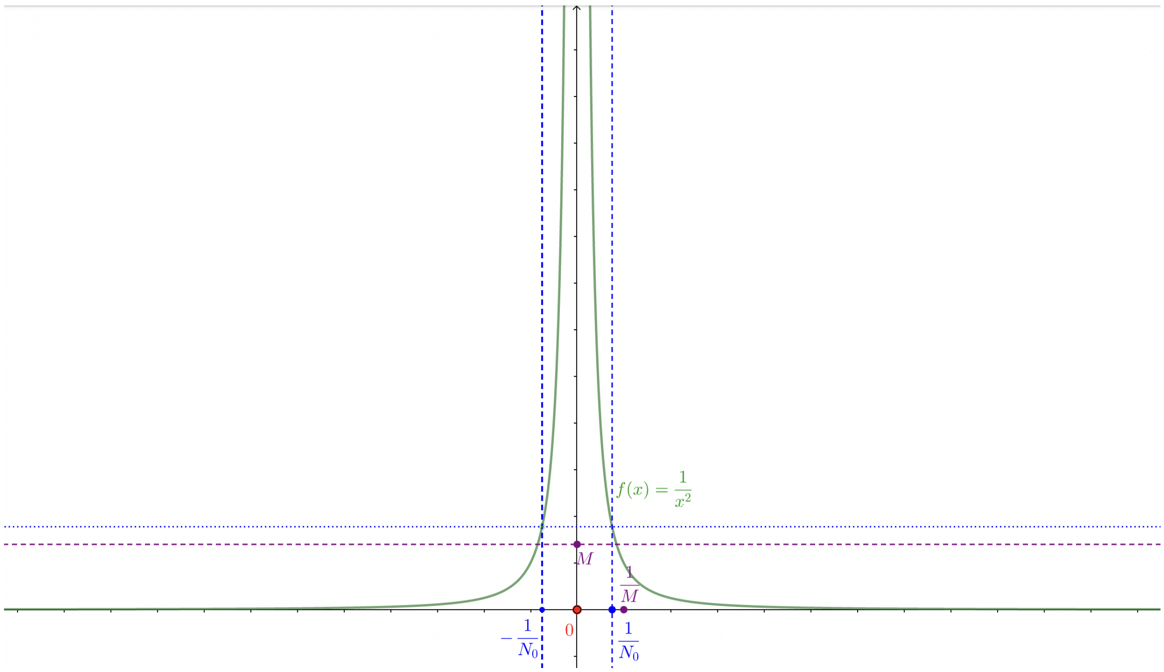

Figura 3: Ilustración de la definición de límite al infinito cuando existe.

Ejemplo 8. Se cumple que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Demostración. La prueba ya fue realizada en los párrafos anteriores, pero la escribimos de manera ordenada a continuación.

Procedemos usando la definición. Sea $M > 0$. Queremos demostrar que existe $\delta > 0$ tal que si $x \in \mathbb{R}$ cumple que $0 < |x - 0| < \delta$ implica que $f(x) > M$.

Consideremos $\alpha = \frac{1}{\sqrt{M}} > 0$, entoces por la propiedad arquimediana existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N_0} < \alpha$. Proponemos $\delta = \frac{1}{N_0}$, entonces si $x \in \mathbb{R}$ cumple que $0 < |x - 0| = |x| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2} = \frac{1}{|x|^2} \\ &> \left(\frac{1}{\delta}\right)^2 = N_0^2 \\ &> \left(\sqrt{M}\right)^2 = M. \end{aligned}$$

Esto prueba lo deseado. Por lo tanto, por definición obtenemos que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$. $\square$

Notamos que en este caso también tiene sentido analizar el comportamiento de una función f cuando nos aproximamos por la izquierda o por la derecha de un punto e indagar si la función crece sin cota o no (en el caso de que el límite no exista).

Definición 9 (Límites laterales infinitos)**.** (I) Sean $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, $c \in \mathbb{R}$ tal que existe $b \in \mathbb{R}$ con $(c, b) \subset A$. Decimos que el **límite de f cuando x tiende a c por la**

derecha es infinito si para toda $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (c, b)$ cumple que $0 < x - c < \delta$, entonces $f(x) > M$. En este caso, usamos la notación

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty.$$

(II) Sean $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, $c \in \mathbb{R}$ tal que existe $a \in \mathbb{R}$ con $(a, c) \subset A$. Decimos que el **límite de f cuando x tiende a c por la izquierda es infinito** si para toda $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (a, c)$ cumple que $0 < c - x < \delta$, entonces $f(x) > M$. En este caso, usamos la notación

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \infty.$$

Ejemplo 10. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\frac{1}{x}$. Entonces $\lim\limits_{x \to 0^-} = \infty$.

Demostración. Sea $M > 0$. Por la propiedad arquimediana, para $\frac{1}{M} > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N_0} < \frac{1}{M}$. Ahora, proponemos $\delta = \frac{1}{N_0} > 0$. Si $x < 0$ cumple que $0 < 0 - x = -x < \delta$, entonces $0 < -x < \frac{1}{N_0} < \frac{1}{M}$, lo cual implica que

$$f(x) = -\frac{1}{x} = \frac{1}{-x} > N_0 > M.$$

Esto prueba lo deseado. Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to 0^-} = \infty$. □

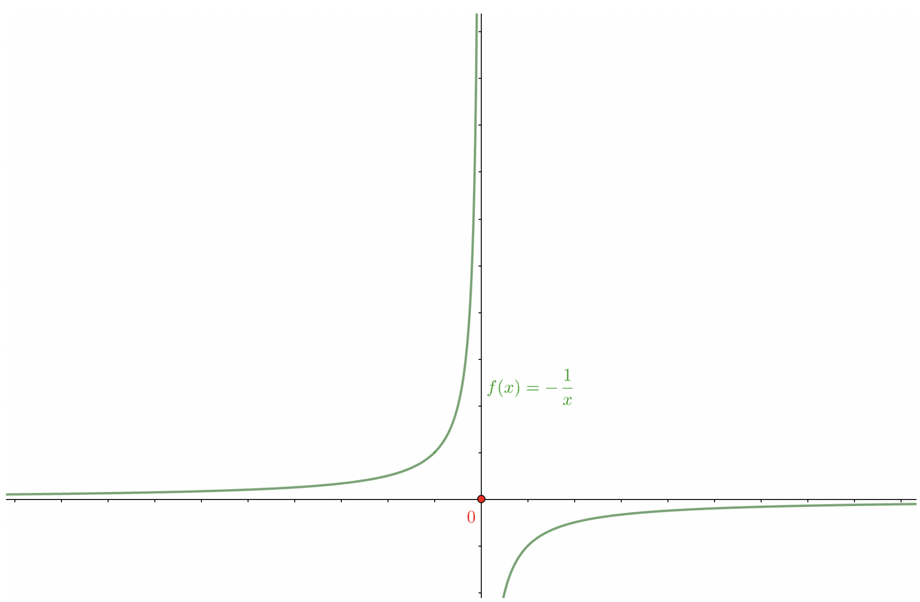

Figura 4: Ilustración de la definición de límite al infinito cuando existe.

Como es de esperarse, se cumple un resultado que relaciona los límites infinitos con los límites laterales infinitos.

Teorema 11. *Sean $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $c \in \mathbb{R}$ tal que existe $(a, b) \subset \mathbb{R}$ con $c \in (a, b)$ y $(a, b) \setminus \{c\} \subseteq A$. Se cumple que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$ si y sólo si $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \infty = \lim\limits_{x \to c^-} f(x)$.*

Demostración. En primer lugar supongamos que $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$. Sea $M > 0$. Por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (a,b)$ cumple que $0 < |x-c| < \delta$, entonces $f(x) > M$.

(I) Si $x \in (c,b)$ satisface que $0 < x-c < \delta$, entonces $0 < |x-c| < \delta$ y esto implica que $f(x) > M$. Esto prueba que $\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty$.

(II) Si $x \in (a,c)$ satisface que $0 < c-x < \delta$, entonces $0 < |x-c| < \delta$ y esto implica que $f(x) > M$. Esto prueba que $\lim_{x\to c^-} f(x) = \infty$.

Lo anterior prueba la primera implicación.

Ahora supongamos que $\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty = \lim_{x\to c^-} f(x)$. Sea $M > 0$. Por la hipótesis existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que

(I) si $x \in (c,b)$ cumple $0 < x-c < \delta_1$, entonces $f(x) > M$,

(II) si $x \in (a,c)$ satisface que $0 < c-x < \delta_2$, esto implica que $f(x) > M$.

Consideremos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Si $x \in (a,b)$ cumple que $0 < |x-c| < \delta$, entonces $0 < x-c < \delta$ o $0 < c-x < \delta$. En el primer caso, por (I) obtenemos que $f(x) > M$, mientras que en el segundo caso también obtenemos que $f(x) > M$ en virtud de (II). Por lo tanto, si $x \in (a,b)$ cumple que $0 < |x-c| < \delta$, entonces $f(x) > M$. Así, por definición obtenemos que $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$. $\square$

Resulta claro que tiene sentido preguntarse el significado de que un límite sea *menos infinito*, así como otras combinaciones. Con el fin de que practique y afiance su entendimiento de estas definiciones, invitamos al lector a realizar el siguiente ejercicio.

Ejercicio 12. *Analice qué otros posibles comportamientos puede obtener al estudiar una función dada.*

(I) Escriba las definiciones de los siguientes símbolos: $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$ *y* $\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty$.

(II) Enuncie y demuestre un teorema análogo al Teorema 11 para límites iguales a menos infinito.

(III) ¿Qué significa $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$*?, ¿y* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$*?, ¿qué otras combinaciones son posibles al trabajar con límites? Escríbalas junto con su respectiva definición.*

Los conceptos anteriores serán utilizados fuertemente cuando intentemos graficar una función dada, pues dichos límites al infinito e infinitos nos permitirán identificar *asíntotas*[1].

[1] De hecho, las asíntotas se definen mediante este tipo de límites