Cálculo diferencial e integral I
Ayudantía 16

Ejercicio 1. *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función y* $c \in [a, b]$*. Decimos que* f ***tiene una discontinuidad evitable en*** c *si* $\lim_{x\to c} f(x)$ *existe pero* $\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$*.*

(I) *Si* $f : [-1, 1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *está definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

¿f *tiene una discontinuidad evitable en* 0*?*

(II) *Si* $f : [-1, 1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *está definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

¿f *tiene una discontinuidad evitable en* 0*?*

Demostración. (I) En primer lugar veamos si existe el límite de f cuando x tiende a 0. Ya que no es muy claro el comportamiento de la función cuando x es cercano a 0, una estrategia es utilizar sucesiones para ello. Consideremos las sucesiones $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2n\pi}\right\}$ y $\{b_n\} = \left\{\frac{1}{2n\pi+\pi/2}\right\}$. Notamos que $a_n,\ b_n \in [-1, 1]$ y $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, además de que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} b_n$. Por otro lado,

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \cos(2n\pi) = 1$$

y

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

lo cual implica, en virtud del Teorema de equivalencia entre límites de funciones y límites de sucesiones, que el límite de f cuando x tiende a 0 no existe porque tenemos dos sucesiones que convergen a 0 pero cuyas sucesiones de imágenes convergen a puntos distintos (ver **Teorema 1** de la **Clase 22**). Por lo tanto, ya que no existe el límite de f cuando x tiende a 0 se concluye que f NO tiene una discontinuidad evitable en 0.

(II) Ya que $\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ para toda $x \neq 0$ y $\lim_{x\to 0} x = 0$, entonces por el **Ejercicio 7** de los **Ejercicios de práctica sobre límites de funciones** obtenemos que

$$\lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \neq 1 = f(0),$$

así que por definición, f tiene una discontinuidad evitable en 0. Note que, en este caso, si definimos $g : [-1, 1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

entonces g es continua en 0 porque $\lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = g(0)$. □

Ahora, veamos que la continuidad en un punto brinda buenas propiedades a la función.

Lema 2 (Continuidad implica acotamiento)**.** *Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Si f es continua en $c \in (a,b)$, entonces existe un intervalo $(p,q) \subset [a,b]$ tal que f es acotada en (p,q).*

Demostración. Supongamos que f es continua en c, entonces $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Entonces, para $\varepsilon_0 = 1$ existe $\delta_0 > 0$ tal que si $|x - c| < \delta$, entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon_0 = 1$. Luego, si $x \in (c - \delta_0, c + \delta_0) \subset [a,b]$ se cumple que

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(c) + f(c)| \\ &\leq |f(x) - f(c)| + |f(c)| \\ &< 1 + |f(c)| \end{aligned}$$

es decir, $|f(x)| < 1 + |f(c)|$.

En conclusión, f es acotada por $1 + |f(c)|$ en $(c - \delta_0, c + \delta_0) \subset [a,b]$. Esto termina la prueba. □

Ya que es posible definir la continuidad por la izquierda o por la derecha, es importante observar que también en este caso, la función no puede crecer o decrecer sin cota en valores cercanos al punto donde hay continuidad lateral. Como es de esperar, la demostración de este resultado es un ejercicio para el lector ya que únicamente hay que proceder como en el Lema 2 anterior.

Lema 3 (Versiones laterales de continuidad implica acotamiento)**.** *Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función.*

(i) *Si f es continua por la derecha en c, entonces existe un intervalo $(p,q) \subset [a,b]$ tal que f es acotada en (p,q).*

(ii) *Si f es continua por la izquierda en c, entonces existe un intervalo $(r,s) \subset [a,b]$ tal que f es acotada en (r,s).*

□

Terminamos esta sesión con una aplicación habitual del teorema del valor intermedio (TVI).

Ejercicio 4. (i) *Demuestre que existe un número $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^{119} + \frac{163}{1+x^2+\operatorname{sen}^2(x)} = 119$.*

(ii) *Demuestre que existe un número $x \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen}(x) = x - 1$.*

Demostración. (i) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^{119} + \frac{163}{1+x^2+\operatorname{sen}^2(x)} - 119$. Notamos que f es continua en $\mathbb{R}$ porque cada una de las funciones que la forman es continua en $\mathbb{R}$ (¿puede dar un argumento completo de este hecho?). Ahora, tenemos que si $x_0 = 1$, entonces

$$f(1) = 1^{119} + \frac{163}{1 + 1^2 + \operatorname{sen}^2(1)} - 119 = -118 + \frac{163}{2 + \operatorname{sen}^2(1)} < -118 + \frac{163}{2} < 0.$$

Por otro lado, si $x_1 = 0$ obtenemos que

$$f(0) = 0^{119} + \frac{163}{1 + 0^2 - \operatorname{sen}^2(0)} - 119 = 163 - 119 = 44 > 0.$$

Luego, como f es continua en $[0,1]$ y $f(1) < 0 < f(0)$, entonces por el Teorema del Valor Intermedio existe $c \in (0,1)$ tal que $f(c) = 0$, es decir,

$$c^{119} + \frac{163}{1 + c^2 + \operatorname{sen}^2(c)} - 119 = 0,$$

de donde,

$$c^{119} + \frac{163}{1 + c^2 + \operatorname{sen}^2(c)} = 119$$

(II) Definimos $g : [0,\pi] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x - 1 - \operatorname{sen}(x)$. Notamos que g es continua en $[0,\pi]$ (¿puede demostrarlo?). También, $g(0) = 0 - 1 - \operatorname{sen}(0) = -1 < 0$ y $g(\pi) = \pi - 1 - \operatorname{sen}(\pi) = \pi - 1 > 0$. Como $g(0) < 0 < g(1)$ y g es continua en $[0,\pi]$, por el Teorema del Valor Intermedio obtenemos que existe $c \in (0,\pi)$ tal que $g(c) = 0$, es decir, $c - 1 - \operatorname{sen}(c) = 0$, de donde obtenemos que $\operatorname{sen}(c) = c - 1$. Esto resuelve el problema. $\square$