Cálculo diferencial e integral I
Ayudantía 18

Ejercicio 1. *Halle la derivada de* $f(x) = \sqrt{x}$ *utilizando la definición.*

Demostración. Notemos que la derivada solo tiene sentido para valores mayores que cero, así, supondremos que $x > 0$ ya que por definición se nos pide un límite. Visto esto, tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Así, por definición tenemos que, si $x > 0$, entonces $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. $\square$

Ejercicio 2. *Halle la derivada de* $f(x) = \frac{1}{x}$ *utilizando la definición.*

Demostración. Notemos que la derivada tiene sentido cuando $x \neq 0$ (¿por qué?). Procedemos al cálculo del límite que define a la derivada que nos interesa:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{hx(x+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x \cdot x} = -\frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por definición, si $x \neq 0$ se cumple que $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. $\square$

Ejercicio 3. *Halle la derivada de* $f(x) = \operatorname{sen} x$ *utilizando la definición.*

Demostración. En este caso la derivada tiene sentido para toda $x \in \mathbb{R}$. Procedemos al cálculo del límite que define a la derivada:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(h) + \cos(x)\operatorname{sen}(h) - \operatorname{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(x)\left(1 - \cos(h)\right) + \cos(x)\operatorname{sen}(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(-\operatorname{sen}(x) \cdot \frac{1-\cos(h)}{h} + \cos(x) \cdot \frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right) \\
&= \left(-\operatorname{sen}(x)\right)\left[\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(h)}{h}\right] + \cos(x)\left[\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right] \\
&= \left(-\operatorname{sen}(x)\right)(0) + \left(\cos(x)\right)(1) \\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

donde hemos usado que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(h)}{h} = 0$$

lo que fue demostrado en el **Teorema 7** de la **Ayudantía 13**. En conclusión, para toda $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $f'(x) = \cos(x)$. □

Ejercicio 4. *Halle la derivada de $f(x) = \cos x$ utilizando la definición.*

Demostración. En este caso, la función coseno está definida para todos los números reales, por lo cual tiene sentido preguntar por la derivada para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Dado lo anterior, procedemos al cálculo del límite que define a la derivada que nos interesa:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\cos(x)\,(1-\cos(h)) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(-\cos(x)\cdot \frac{1-\cos(h)}{h} - \operatorname{sen}(x)\cdot \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \right) \\
&= (-\cos(x)) \left[\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(h)}{h} \right] - \operatorname{sen}(x) \left[\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \right] \\
&= (-\cos(x))\,(0) - \operatorname{sen}(x)\,(1) \\
&= -\operatorname{sen}(x)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para toda $x \in \mathbb{R}$ se satisface que $f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$. □

Además de las últimas dos derivadas que se obtuvieron en los dos ejercicios anteriores, añadimos las derivadas de dos funciones especiales que son definidas habitualmente en el curso de cálculo integral: las funciones exponencial y logaritmo.

Teorema 5. *Se cumple lo siguiente:*

(I) *Si $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, entonces $f'(x) = \cos(x)$.*

(II) *Si $f(x) = \cos(x)$, entonces $f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$.*

(III) *Si $f(x) = e^x = \exp(x)$, entonces $f'(x) = e^x$.*

(IV) *Si $f(x) = \ln(x)$, entonces $f'(x) = \frac{1}{x}$.*

Ejercicio 6. *Halle las derivadas de las siguientes funciones.*

(I) $f(x) = 2x^2 + 5\,\mathrm{sen}(x^3)$

(II) $g(x) = \frac{5\exp(x^4)}{3x^2} - 11x - 25$

(III) $h(x) = \cos\left(e^{-x^2}\right)$

(IV) $m(x) = x^4 \tan(x)$

Demostración. Ya que la derivada se define mediante un límite, podemos utilizar el teorema del álgebra de límites. Adicionalmente, disponemos de la regla de la cadena. Los cálculos que haremos se harán en todos los puntos donde la derivada tenga sentido y exista (no lo demostraremos).

(I) Escribamos $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, con $f_1(x) = 2x^2$ y $f_2(x) = 5\,\mathrm{sen}\left(x^3\right)$. Por un lado tenemos que

$$f_1'(x) = 2\left(2x^{2-1}\right) = 4x$$

y por otro

$$f_2'(x) = 5\left(\cos\left(x^3\right)\cdot\left(3x^2\right)\right) = 15x^2\cos\left(x^3\right)$$

donde hemos aplicado la regla del múltiplo escalar (también conocida como *regla de multiplicar por una constante*) y la regla de la cadena para calcular la derivada de $g_2(x)$. Por lo tanto

$$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) = 4x + 15x^2\cos\left(x^3\right).$$

(II) Consideremos $g(x) = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x)$ con $g_1(x) = \frac{5\exp(x^4)}{3x^2}$, $g_2(x) = -11x$ y $g_3(x) = -25$. Observamos que al aplicar la regla de múltiplo escalar, la regla de la derivada de un cociente y la regla de la cadena, obtenemos que

$$\begin{aligned} g_1'(x) &= \frac{5}{3}\left(\frac{x^2\exp\left(x^4\right)\cdot\left(4x^{4-1}\right) - \exp\left(x^4\right)\cdot\left(2x^{2-1}\right)}{\left(x^2\right)^2}\right) \\ &= \frac{5}{3}\left(\frac{4x^5\exp\left(x^4\right) - 2x\exp\left(x^4\right)}{x^4}\right) \\ &= \frac{10\exp\left(x^4\right)\left(2x^4-1\right)}{3x^3} \\ &= \frac{10\left(2x^4-1\right)\exp\left(x^4\right)}{3x^3} \end{aligned}$$

También,

$$g_2'(x) = -11(1) = -11$$

y

$$g_3'(x) = 0$$

Por lo tanto,

$$g'(x) = g_1'(x) + g_2'(x) + g_3'(x) = \frac{10\left(2x^4-1\right)\exp\left(x^4\right)}{3x^3} + (-11) + 0 = \frac{10\left(2x^4-1\right)\exp\left(x^4\right)}{3x^3} - 11$$

(III) Para calcular la derivada de esta función notamos que se trata de una composición de 3 funciones: $p(x) = \cos(x)$, $r(x) = e^x$ y $\ell(x) = -x^2$, esto es,

$$h(x) = (p\circ r\circ \ell)(x) = p\left(r\left(\ell(x)\right)\right).$$

En virtud de lo anterior, debemos aplicar la regla de la cadena dos veces, esto es, obtenemos que

$$\begin{aligned} h'(x) &= p'\left(r\left(\ell(x)\right)\right) \cdot r'(\ell(x)) \cdot \ell'(x) \\ &= -\operatorname{sen}\left(e^{-x^2}\right) \cdot \left(e^{-x^2}\right) \cdot (-2x) \\ &= 2x\ e^{-x^2} \operatorname{sen}\left(e^{-x^2}\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$h'(x) = 2x\ e^{-x^2} \operatorname{sen}\left(e^{-x^2}\right).$$

(IV) Sean $t(x) = x^4$ y $u(x) = \tan(x)$. Entonces $m(x) = t(x) \cdot u(x)$, por lo cual, para hallar la derivada de $m(x)$ tendremos que utilizar la regla del producto, esto es

$$m'(x) = t(x)\ u'(x) + t'(x)\ u(x).$$

Tenemos que $t'(x) = 4x^3$ y ya que $u(x) = \tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$, entonces

$$u'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \operatorname{sen}(x)\left(-\operatorname{sen}(x)\right)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$$

Por lo tanto,

$$m'(x) = x^4 \sec^2(x) + 4x^3 \tan(x) = x^3\left(x \sec^2(x) + 4\tan(x)\right)$$

$\square$