Cálculo diferencial e integral I
Ayudantía 19

Ejercicio 1. *Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

halle la función f'.

Demostración. Ya que se nos pide encontrar una función, lo primero que debemos de hacer es determinar su dominio y su regla de correspondencia ya que en nuestro caso el codominio siempre es $\mathbb{R}$. Para ello, notemos que si $x \neq 0$, entonces f es derivable y podemos calcular dicha derivada mediante las reglas de derivación de las cuales disponemos:

$$f'(x) = x \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ahora, para $x = 0$ no podemos aplicar dichas reglas. Notamos que, en efecto, f es continua en 0 porque

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$$

porque $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ es acotada (¿puede decir qué resultado estamos utilizando?). Sin embargo, si $h \neq 0$ tenemos que

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)$$

y ya sabemos que el límite de $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)$ cuando h tiende a 0 no existe, lo cual implica que tampoco existe el límite de $\frac{f(0+h)-f(h)}{h}$, esto es, no existe la derivada de f en 0.

Por lo tanto, la derivada de f está definida en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, así que $f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ está dada por $f'(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$. □

Ejercicio 2. *Dada la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

halle la función g''.

Demostración. Notemos que este problema nos pide hallar una segunda derivada (donde exista, naturalmente), por lo que en principio debemos hallar la primera derivada. Para ello, notemos que si $x \neq 0$ podemos aplicar las reglas de derivación conocidas y obtenemos que

$$g'(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)(2x) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

además, si $x = 0$ se cumple que

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

porque $\lim\limits_{h \to 0} h = 0$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)$ es acotado. Por lo tanto, g' está definida para todos los números reales y además ya hemos calculado su regla de correspondencia. Así, obtenemos $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Ahora, notamos que si $x \neq 0$, entonces g' es derivable y podemos calcular su derivada utilizando las reglas de derivación conocidas:

$$\begin{aligned} g''(x) &= 2\left[x \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right] - \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \left(2 - \frac{1}{x^2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Por otro lado, afirmamos que el límite de g' cuando x tiende a 0 no existe. Para ello, consideremos las sucesiones $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2n\pi}\right\}$ y $\{b_n\} = \left\{\frac{1}{2n\pi + \pi/2}\right\}$. Tenemos que

(I) $a_n,\ b_n \in \operatorname{Dom}(g')$,

(II) $a_n \neq 0$ y $b_n = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y

(III) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0 = \lim\limits_{n \to \infty} b_n$.

Notamos que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$g'(a_n) = 2\frac{1}{2n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}}\right) - \cos\left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}}\right) = \frac{1}{n\pi}\operatorname{sen}(2n\pi) - \cos(2n\pi) = -1$$

porque $\operatorname{sen}(2n\pi) = 0$ y $\cos(2n\pi) = 1$. También, para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned} g'(b_n) &= 2\frac{1}{2n\pi + \pi/2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi+\pi/2}}\right) - \cos\left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi+\pi/2}}\right) \\ &= \frac{2}{2n\pi + \pi/2}\operatorname{sen}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{2}{2n\pi + \pi/2} \end{aligned}$$

porque $\operatorname{sen}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$ y $\cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Por lo tanto, $\lim\limits_{n \to \infty} g'(a_n) = -1$ y $\lim\limits_{n \to \infty} g'(b_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{2}{2n\pi + \pi/2} = 0$, por lo cual encontramos dos sucesiones que convergen a 0, son distintas de cero, pero cuyas sucesiones de imágenes convergen a dos puntos distintos, lo cual implica, por el Teorema de equivalencia entre límites de funciones y límites de sucesiones, que el límite de g' cuando x tiende a 0 no existe. En virtud de esto último, concluimos que g' no es continua en 0, de donde se sigue que g' no es derivable en 0.

En conclusión, $\operatorname{Dom}(g'') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y así obtenemos que $g'' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ está definida por

$$g''(x) = \left(2 - \frac{1}{x^2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

□

Una interpretación de la derivada: velocidad instantánea

Para concluir esta sesión, demos una interpretación física de la derivada. Para ello, consideremos una partícula en movimiento a lo largo de una línea recta, donde hemos fijado un punto de referencia llamado *origen* que denotamos por O, a partie del cual medimos distancias: hacia la derecha de O se representan por números positivos mientras que hacia la izquierda de O se utilizan números negativos. A continuación, denotemos por $s(t)$ a la distancia de la partícula respecto a O en el tiempo t. Esta elección es conveniente por la siguiente razón: ya que la posición del objeto depende del tiempo, inmediatamente podemos considerar que esto define una función s.

A continuación, si consideremos el tiempo $t = a$ notamos que el cociente

$$\frac{s(a+h) - s(a)}{h}$$

se interpreta como la *velocidad media* (o promedio) de la partícula durante el intervalo de tiempo entre a y $a+h$ (note que podría ocurrir que $h < 0$). Es importante notar que dicha velocidad media, además de a, depende de h. Por otro lado, el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{s(a+h) - s(a)}{h}$$

depende únicamente de a (y de la función s). Ahora, ¿por qué es importante este límite? Ya que estamos analizando el movimiento de una partícula, nos interesaría hablar de la *velocidad de la partícula en el tiempo* $t = a$, pero la definición usual de velocidad es la definición de velocidad media dada anteriormente, por lo cual, este límite se convierte en una definición razonable de *velocidad en el tiempo* $t = a$.

Definición 3. La **velocidad** (**instantánea**) de la partícula en el tiempo a es

$$s'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{s(a+h) - s(a)}{h}.$$

Es importante notar que dicha velocidad instantánea $s'(a)$ puede ser negativa, por lo cual a $|s'(a)|$ a veces se le denomina **rapidez** (**instantánea**).

Observación 4. La velocidad de una partícula también se suele llamar **tasa de variación de su posición**. Esta noción de derivada, como tasa de variación, se puede aplicar a cualquier fenómeno físico en el cual haya una cantidad que varíe en función del tiempo. Por ejemplo, la *tasa de variación de la masa* de un objeto en crecimiento es la derivada de la función m, donde $m(t)$ es la masa en el tiempo t.

Una vez que tenemos la velocidad $s'(t)$ de una partícula que se mueve a lo largo de una recta, podemos preguntarnos si existe alguna interpretación de la derivada de dicha velocidad. Resulta que $s''(t)$ se conoce como la **aceleración** al tiempo t. Así, cuando el lector viaje sentado en un coche que acelera puede sentir el efecto de la segunda derivada.