Cálculo diferencial e integral I
Ayudantía 20

Convexidad y concavidad

En esta sesión estudiaremos un concepto que tiene un origen geométrico, pero que con las interpretaciones adecuadas en términos de funciones (y por tanto de Cálculo Diferencial) nos permitirá conocer más información acerca del comportamiento de dichas funciones y, como aplicación habitual, nos permitirá dibujar gráficas de funciones más precisas.

Definición 1 (Convexidad (geométrica))**.** Una función f es **convexa**, en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ si para cualesquiera $a, b \in I$ se cumple que el segmento que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$ está *por encima* de la gráfica de f.

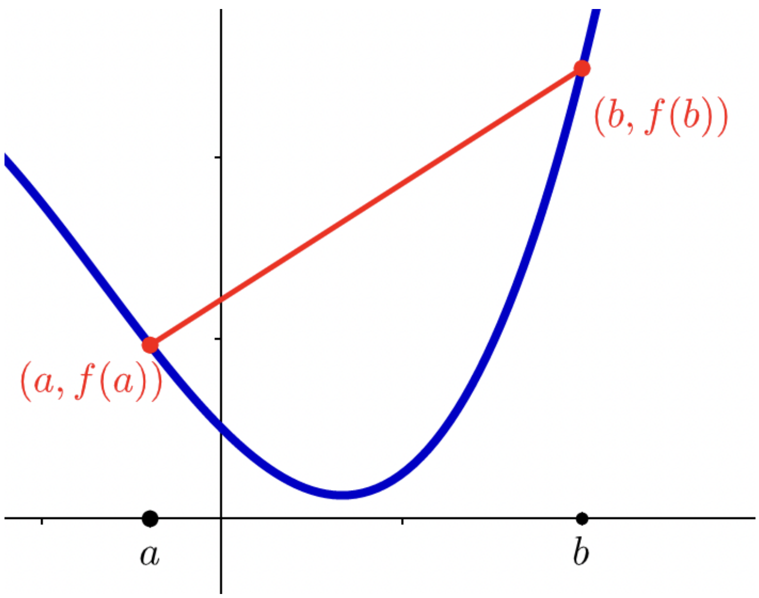

Figura 1: Ejemplo de una función convexa en un intervalo dado.

La condición geométrica definida anteriormente tiene una formulación analítica que nos permitirá llevar a cabo demostraciones de algunos resultados importantes. Para ello, notemos que la recta que une los puntos $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$ es la gráfica de la función g definida por

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a) + f(a).$$

Ya que nos interesa que el segmento se encuente por arriba de la gráfica de f esto se traduce en que $g(x) > f(x)$, esto es

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a) + f(a) > f(x),$$

de donde se sigue que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a) > f(x) - f(a),$$

o bien

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

lo cual nos lleva a una definición analítica de convexidad.

Definición 2 (Convexidad (analítica))**.** Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Una función $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **convexa** en I si para cualesquiera $a,\ x,\, b \in I$ tales que $a < x < b$ se cumple que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

De manera natural, se puede invertir el sentido de la desigualdad de la Definición 2 (o bien cambiar *encima* por *debajo* en la Definición 1) y obtener un nuevo concepto.

Definición 3 (Convexidad (analítica))**.** Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Una función $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **cóncava** en I si para cualesquiera $a,\ x,\, b \in I$ tales que $a < x < b$ se cumple que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

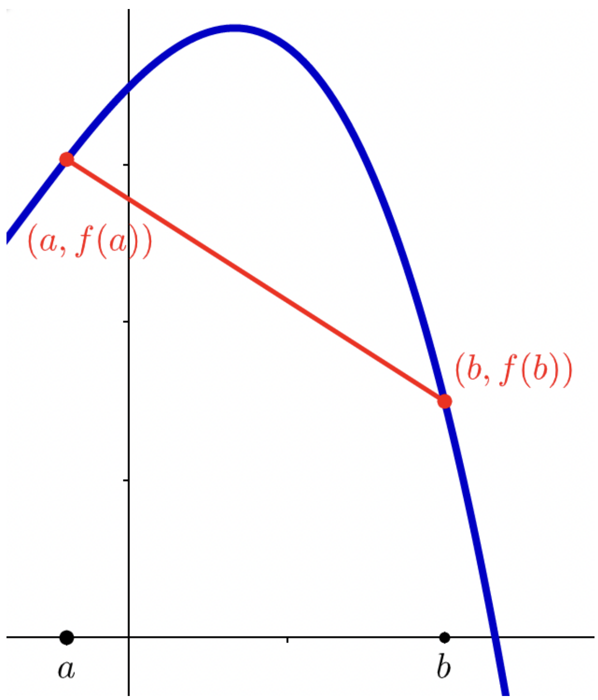

Figura 2: Ejemplo de una función cóncava en un intervalo dado.

Convención 4. A pesar de los nombres anteriores, es común utilizar el siguiente lenguaje para referirse a funciones convexas o cóncavas: a las funciones *convexas* se les suele llamar **cóncavas hacia arriba**, mientras que a las funciones *cóncavas* se les denomina **cóncavas hacia abajo**. La razón es justamente gráfica: cuando la función es convexa parece que "abre hacia arriba", mientras que al ser cóncava (a secas) la representación gráfica parece "abrir hacia abajo". **En lo que sigue de estas notas utilizaremos estos nombres**.

Observación 5. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función cóncava hacia abajo en el intervalo I. entonces $-f$ es cóncava hacia arriba en I. Similarmente, si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es cóncava hacia arriba en I, entonces f es cóncava hacia abajo en I.

Geométricamente, podemos notar que si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es cóncava hacia arriba y diferenciable en $a \in I$, entonces la gráfica de f está *por arriba* de la recta tangente a la gráfica de f en $(a, f(a))$,

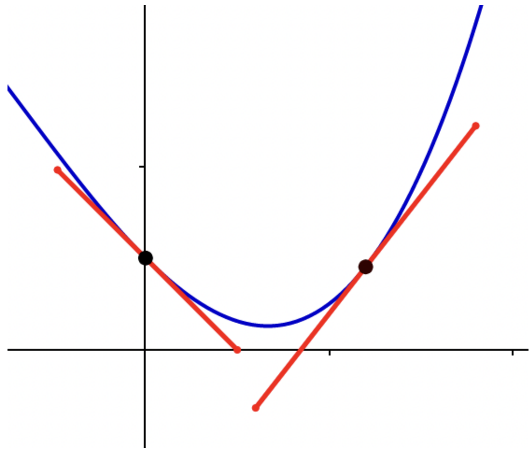

Figura 3: La gráfica de f está por arriba de la tangente cuando f es cóncava hacia arriba.

excepto en dicho punto de contacto. Además, si $a < b$ y f es derivable en ambos puntos, entonces $f'(a) < f'(b)$. En la Figura 3 se ilustran ambos hechos.

Se puede observar un resultado simétrico en el caso de funciones cóncavas hacia abajo, vea la Figura 4.

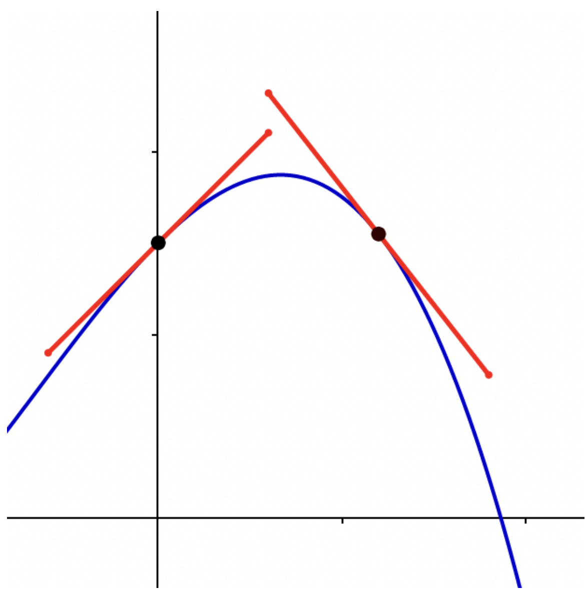

Figura 4: La gráfica de f está por debajo de la tangente cuando f es cóncava hacia abajo.

Lema 6. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo (abierto). Supongamos que $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en I y que f' es estrictamente creciente en I. Sean $a, b \in I$, si $a < b$ y $f(a) = f(b)$, entonces $f(x) < f(a) = f(b)$ para cualquier $x \in (a, b)$.*

Demostración. Procedemos por contradicción. Supongamos que existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) \geq f(a)$. Entonces el máximo de f en $[a, b]$ se alcanza en algún punto $x_1 \in (a, b)$ y $f(x_1) \geq f(a)$, además, $f'(x_1) = 0$. Por otro lado, por el Teorema del Valor Medio aplicado en el intervalo $[a, x_1]$

obtenemos x_2 con $a < x_2 < x_1$ tal que

$$f'(x_2) = \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} \geq 0 = f'(x_1)$$

lo cual contradice que f' es estrictamente creciente. Esto termina la prueba. $\square$

Teorema 7. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en I y f' es estrictamente creciente en I, entonces f es cóncava hacia arriba en I.*

Demostración. Sean $a, b \in I$ con $a < b$. Definimos la función $g : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Notamos que g' también es una función estrictamente creciente en $[a, b]$ (basta calcular dicha derivada y usar que f' es estrictamente creciente); y además, $g(a) = g(b) = f(a)$. Entonces, por el Lema 6 aplicado a esta función g se concluye que si $a < x < b$, entonces $g(x) < g(a)$. Lo anterior significa que si $a < x < b$, entonces

$$f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) < f(a)$$

de donde se obtiene que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Luego, por definición, f es cóncava hacia arriba en I. Esto termina la prueba. $\square$

El resultado anterior tiene un corolario inmediato.

Corolario 8. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función tal que $f'' > 0$ en I, entonces f es cóncava hacia arriba.*

Demostración. Si $f'' > 0$ en I, esto implica que f' es creciente en I. Entonces el resultado se sigue a partir del Teorema 7. $\square$

De manera simétrica obtenemos los siguientes resultados.

Teorema 7 bis. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en I y f' es estrictamente decreciente en I, entonces f es cóncava hacia abajo en I.

Corolario 8 bis. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función tal que $f'' < 0$ en I, entonces f es cóncava hacia abajo en I.

Una manera de recordar los 4 resultados anteriores es la siguiente:

Criterio de las caritas. Si la segunda derivada es positiva, la carita sonríe (cóncava hacia arriba). Si la segunda derivada es negativa, la carita está triste (cóncava hacia abajo). Esto está representado en la Figura 5.

Figura 5: Representación del criterio de las caritas. Están dibujadas en la mano de Oscar porque está cuidando el ambiente.