Cálculo diferencial e integral I
Ayudantía 21

Para comenzar esta sesión recordamos la mnemotecnia vista en la sesión anterior.

Criterio de las caritas. Si la segunda derivada es positiva, la carita sonríe (cóncava hacia arriba). Si la segunda derivada es negativa, la carita está triste (cóncava hacia abajo). Esto está representado en la Figura 1.

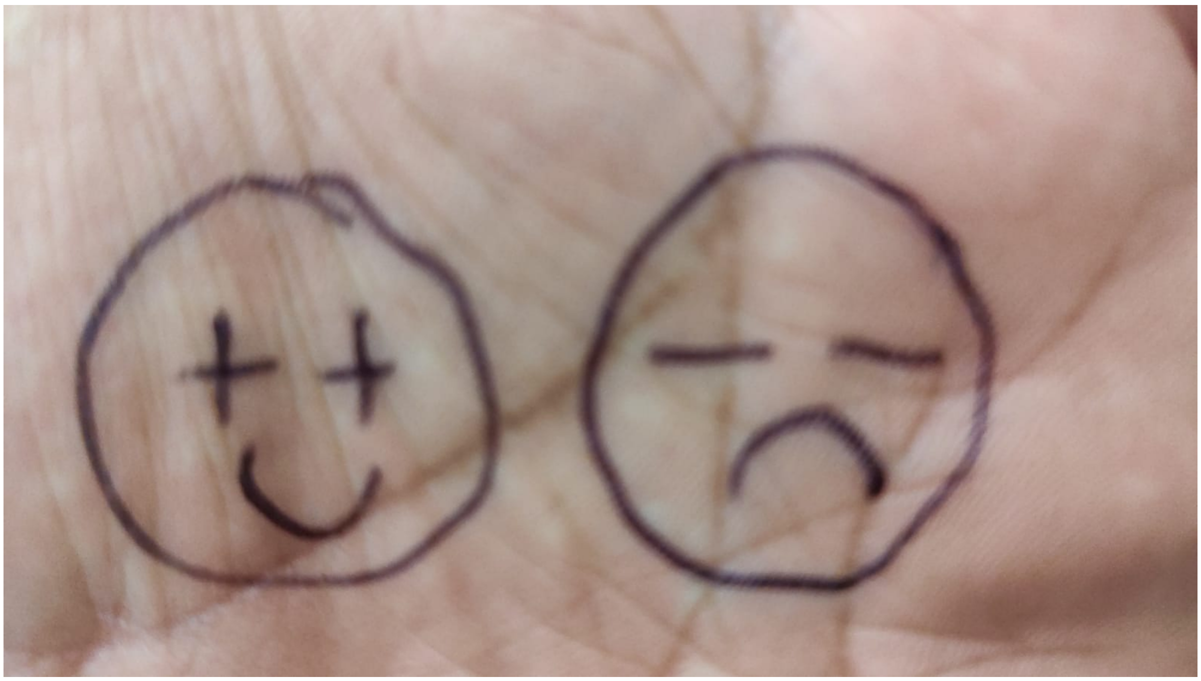

Figura 1: Representación del criterio de las caritas. Están dibujadas en la mano de Oscar porque está cuidando el ambiente.

Gráfica de una función

En esta sesión realizamos una aplicación de los conceptos definidos en la ayudantía anterior: graficaremos una función utilizando técnicas de cálculo diferencial. Es importante notar que en este ejemplo utilizaremos fuertemente que la función tiene una segunda derivada con buenas propiedades.

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

En particular, notamos que

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Por lo tanto, $f'(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$ y $f(0) = 1$. Además,

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \quad & \text{si } x < 0, \\ f'(x) < 0 \quad & \text{si } x > 0. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{gathered} f(x) > 0 \text{ para toda } x \in \mathbb{R}, \\ \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \\ f \text{ es una función par} \end{gathered}$$

Utilizando las propiedades anteriores podemos esperar que la gráfica de la función f se parezca a la mostrada en la Figura 2.

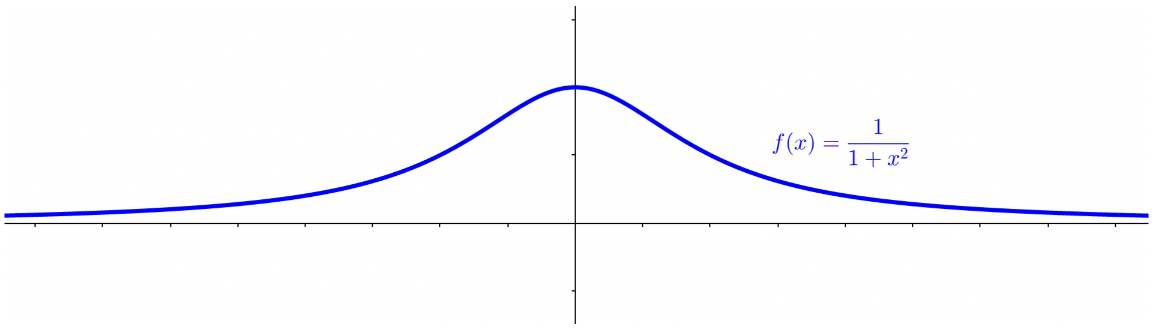

Figura 2: Primer esbozo de la gráfica de f.

¿Qué información adicional obtenemos al usar la segunda derivada? En primer lugar notamos que

$$f''(x) = \frac{2\left(3x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$$

Analicemos el signo de $f''(x)$. Vemos que $f''(x) = 0$ sólo cuando $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ o $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. **Ya que f'' es continua**, debe mantener el mismo signo en cada uno de los intervalos $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, y $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$ (en virtud del Teorema del Valor Intermedio). Así, por lo dicho antes, nos basta con conocer el signo en únicamente un punto de cada intervalo para conocer el signo en todo el intervalo. Tenemos que

$$\begin{gathered} f''(-1) = \tfrac{1}{2} > 0, \\ f''(0) = -2 < 0, \\ f''(1) = \tfrac{1}{2} > 0, \end{gathered}$$

por lo cual concluimos que

$$\begin{aligned} f'' > 0 &\quad \text{en los intervalos } \left(-\infty, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ y } \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right), \\ f'' < 0 &\quad \text{en el intervalo } \left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

Entonces, por el Criterio de las caritas se sigue que f es cóncava hacia arriba en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y en el intervalo $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$. Además, el mismo Criterio de las caritas implica que f es cóncava hacia abajo en el intervalo $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Toda esta información está presentada en la Figura 3

Además, notamos que en los puntos $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ *hay un cambio de concavidad*, pues en se pasa o bien de ser cóncavo hacia arriba a ser cóncavo hacia abajo, o viceversa, lo cual se ve representado en la gráfica como que la recta tangente en los puntos $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$ y

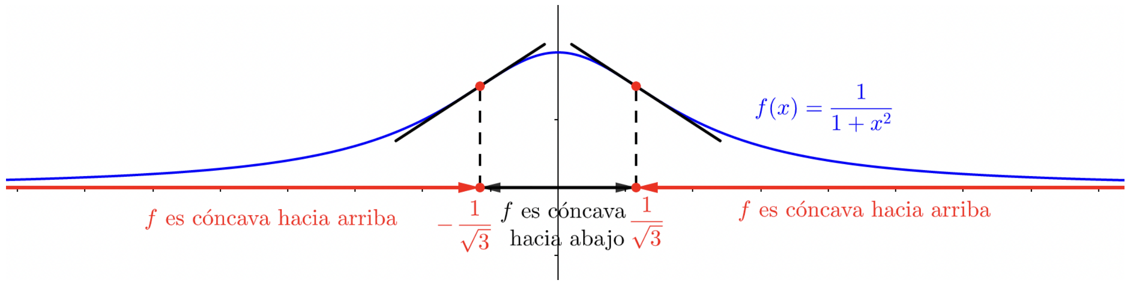

Figura 3: Segundo esbozo de la gráfica de f.

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$ tiene una parte por arriba y otra parte por abajo de la gráfica de f. Este clase de puntos son importantes, por lo cual merecen un nombre.

Definición 1. Sea f una función. Decimos que a es un **punto de inflexión** de f si hay cambio de concavidad en a. Geométricamente esto significa que la recta tangente en $(a, f(a))$ tiene una parte por arriba y otra parte por debajo de la gráfica de f en puntos alrededor de $(a, f(a))$.

Observación 2. Es importante notar que se suele usar como estrategia para encontrar los puntos de inflexión el hallar los puntos donde la segunda derivada f'' es igual a cero, pero esto no es una prueba suficiente: si $f(x) = x^4$, tenemos que $f''(0) = 0$, pero la función f es cóncava hacia arriba y no tiene ningún cambio de concavidad, por lo cual 0 NO es un punto de inflexión.

A manera de resumen, todo el análisis realizado en esta sección se puede utilizar para estudiar el comportamiento de cualquier función. En particular, el conocer las regiones (intervalos) donde la función es cóncava hacia arriba (o hacia abajo) nos evita conclusiones erróneas respecto a f (como lo es la "forma" en la cual *crece* dicha función).