

Cálculo diferencial e integral I

Ejercicios de práctica sobre funciones

Indicaciones: A continuación presentamos una serie de ejercicios cuya finalidad es que practiquen/refuercen los temas vistos recientemente. Esta lista de ejercicios se publica a petición de ustedes y solo es para practicar.

1. Sea $g(x) = x^2$, y sea

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

- a) ¿Para cuáles y es $h(y) < y$?
- b) ¿Para cuáles y es $h(y) < g(y)$?
- c) ¿Qué es $g(h(z)) - h(z)$?
- d) ¿Para cuáles w es $g(w) < w$?
- e) ¿Para cuáles ε es $g(g(\varepsilon)) = g(\varepsilon)$?
2. ¿Para qué números a , b , c y d la función $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ satisface $f(f(x)) = x$? (¿Para qué números dicha ecuación tiene sentido?)

3. Demuestre o dé un contraejemplo para cada una de las siguientes afirmaciones:

a) $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$.

b) $(g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f$.

c) $\frac{1}{f \circ g} = \frac{1}{f} \circ g$.

d) $\frac{1}{f \circ g} = f \circ \left(\frac{1}{g}\right)$.

4. Considere las funciones $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$, $g(x) = |x|$ y $h(x) = \frac{1}{x}$. Para cada una de las siguientes funciones, indique si es par, impar o ninguna de las dos. En el último caso, exprese a la función como suma de una función par y una impar. Justifique sus respuestas.

a) $(f \circ g)(x)$

b) $(g \circ f)(x)$

c) $(h \circ f)(x)$

5. Para cada una de las funciones siguientes, indique si es par, impar o ninguna de las dos. En el último caso, exprese a la función como suma de una función par y una impar. Justifique sus respuestas.

a) $f(x) = \frac{2}{1-x^2}$

b) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

c) $h(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{1+x^3}$

6. Sean $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ y $g(x) = \frac{1}{1+x}$. Para cada una de las siguientes funciones diga si cumplen o no las siguientes propiedades: par, impar, inyectiva¹ y suprayectiva² sobre \mathbb{R} . Justifique sus respuestas.

a) $2g(x) + 1$

b) $f(x)^2g(x)$

c) $xg(x^2)$

7. Dibuje la gráfica de cada una de las siguientes funciones. Justifique sus respuestas.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

b) $g(x) = \frac{1}{2-x}$

c) $h(x) = \frac{1-3x}{x}$

8. Considere la función $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Dibuje la gráfica de cada una de las siguientes funciones. Justifique sus respuestas.

a) $f(x) - 1$

c) $f\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $f(x+1)$

d) $f(x^2)$

¹Una función $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es **inyectiva** si dados $x, y \in A$ con $x \neq y$ se cumple que $f(x) \neq f(y)$.

²Una función $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es **suprayectiva** sobre \mathbb{R} si para toda $y \in \mathbb{R}$ (el codominio) existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.