Última actualización: 9 de julio de 2021

Cálculo diferencial e integral I
Ejercicios de práctica sobre límites de funciones

Indicaciones: A continuación presentamos una serie de ejercicios cuya finalidad es que practiquen/refuercen los temas vistos recientemente.

1. Encuentre, si existen, los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to 4}(x-\lfloor x\rfloor)$

   b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\,\text{sen}(3x)}{\text{sen}(5x)}$

   c) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$

   d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

2. Encuentre
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+7}-\sqrt{2x^2+10x-3}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{3x^2-1}}.$$

3. Encuentre el siguiente límite y demuestre que lo es, mediante la definición
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5}{2-sen^2x}.$$

4. Sean $l\in\mathbb{R}$, $f:A\to\mathbb{R}$ una función y $c\in\mathbb{R}$ tal que existe $(a,b)\subseteq\mathbb{R}$ con $c\in(a,b)$ y $(a,b)\setminus\{c\}\subseteq A$. Se tiene que $\lim\limits_{x\to c}f(x)=0$, si y sólo si $\lim\limits_{x\to c}|f|(x)=0$.

5. Demuestre que si $\lim\limits_{x\to c}f(x)=l$, entonces $\lim\limits_{x\to c}|f(x)|=|l|$. ¿Se vale el regreso? Argumente su respuesta.

6. Demuestre que si $\lim\limits_{x\to c}f(x)=l$ y $\lim\limits_{x\to c}g(x)=m$, entonces $\lim\limits_{x\to c}\text{máx}(f,g)(x)=\text{máx}(l,m)$ y $\lim\limits_{x\to c}\text{mín}(f,g)(x)=\text{mín}(l,m)$.

7. Muestre que si $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$ y $f(x)$ es una función acotada entonces $\lim\limits_{x\to 0}f(x)g(x)=0$.

8. Sea $f:A\to\mathbb{R}$ una función tal que existe $(a,b)\subseteq\mathbb{R}$ con $0\in(a,b)$ y $(a,b)\setminus\{0\}\subseteq A$. Supongamos que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=l$ y consideremos $k\neq 0$, entonces
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(kx)}{x}=kl.$$

9. Analice qué otros posibles comportamientos puede obtener al estudiar una función dada.

   a) Escriba las definiciones de los siguientes símbolos: $\lim\limits_{x\to c}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to c^+}f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to c^-}f(x)=-\infty$.

   b) Enuncie y demuestre un teorema análogo al Teorema de equivalencia con límites laterales para límites iguales a menos infinito.

c) ¿Qué significa $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$?, ¿y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$?, ¿qué otras combinaciones son posibles al trabajar con límites? Escríbalas junto con su respectiva definición.

10. a) Enuncie y demuestre los teoremas de álgebra de límites y del sándwich para límites laterales.

    b) Enuncie y demuestre los teoremas de álgebra de límites y del sándwich para límites al infinito.

11. Encuentre, si existen, los siguientes límites:

    a) $\lim_{x\to\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

    b) $\lim_{x\to\infty} x\left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

    c) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$

    d) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|}$