Última actualización: 28 de junio de 2021

Cálculo diferencial e integral I
Ejercicios de práctica sobre sucesiones

Indicaciones: A continuación presentamos una serie de ejercicios cuya finalidad es que practiquen/refuercen los temas vistos recientemente. Esta lista de ejercicios se publica a petición de ustedes y solo es para practicar.

1. Encuentre los siguientes límites. Argumente sus respuestas.

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+15}{1-n^3}$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+n^2-n}{n^3-n^2+n}$

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4+n^2-n}{n-2n^2-3n^4}$

   d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n-\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$

2. Sea $\{a_n\}$ una sucesión convergente. Para toda $k \in \mathbb{N}$ se cumple que
$$\lim_{n\to\infty} a_{n+k} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

3. Sean $\{a_n\}$ una sucesión y $l \in \mathbb{R}$. Demuestre que $\{a_n\}$ converge a l si y sólo si cualquier subsucesión de $\{a_n\}$ converge a l.

4. Encuentre
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+11)^2}+\frac{1}{(n+12)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n+10)^2}+\frac{1}{(2n+11)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n+20)^2}\right).$$
   Sugerencia: Acote cada sumando y utilice el teorema del sándwich.

5. Sea $\{a_n\}$ una sucesión tal que $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = \sqrt{1+\sqrt{a_n}}$ para todo número natural n. Pruebe que la sucesión $\{a_n\}$ converge.

6. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números con $a_1 = 1$ y $a_n = 1 + a_1 + 2a_2 + \cdots + (n-1)a_{n-1}$ para todo número natural n. Encuentre $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n!}$.
   Sugerencia: Primero encuentre el valor de a_n.

7. Demuestre que

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$, si $a > 1$. Sugerencia: $a = 1 + h$ para algún $h > 0$.

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, si $0 < a < 1$.

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, si $a > 1$. Sugerencia: $\sqrt[n]{a} = 1 + h$, acote el valor de h.

   d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, si $0 < a < 1$.

   e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.