Cálculo diferencial e integral I
Contenido Extra 01: Resultados útiles adicionales

En este texto se presentan algunos resultados adicionales a los estudiados en las sesiones y ayudantías anteriores, por lo cual se les invita a demostrarlos ya que ello les permitirá afinar los conceptos y herramientas que se han trabajado hasta ahora.

Lema 1. *Sean x, $y \in \mathbb{R}$. Denotamos al* mínimo *de x y y por* $\operatorname{mín}(x, y)$ *y al* máximo *de x y y por* $\operatorname{máx}(x, y)$. *Se cumple que*

$$\begin{aligned} \operatorname{mín}(x, y) &= \frac{x + y - |y - x|}{2}, \\ \operatorname{máx}(x, y) &= \frac{x + y + |y - x|}{2}. \end{aligned}$$

Definición 2. Sea $n \in \mathbb{N}$ un número natural. Consideremos $k \in \mathbb{Z}$. Se define el *coeficiente binomial* $\binom{n}{k}$ como sigue:

(I) Si $k < 0$, entonces $\binom{n}{k} = 0$.

(II) Si $k = 0$, entonces $\binom{n}{0} = 1$.

(III) Si $0 < k < n$, entonces

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

(IV) Si $k = n$, entonces $\binom{n}{n} = 1$.

(V) Si $k > n$, entonces $\binom{n}{k} = 0$.

Es importante notar que si definimos $0! = 1$ entonces las definiciones (II) y (IV) son un caso particular de la definición (III).

Lema 3. *Si $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq k \leq n$, entonces:*

(I) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$.

(II) *Se cumple que $\binom{n}{k}$ siempre es un número natural.*

(III) *[Teorema del binomio] Si x, $y \in \mathbb{R}$, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que*

$$(x + y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j}.$$

Lema 4 (Desigualdad de Bernoulli)**.** *Si $h > -1$, entonces*

$$(1+h)^n \geq 1 + hn$$

para cualquier número natural n.

Lema 5 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *Sean $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2}.$$

Definición 6. Sean $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tales que $x_j > 0$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(I) La *media armónica* H_n se define como

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

(II) La *media geométrica* G_n está dada por

$$G_n = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

(III) La *media aritmética* A_n está definida como

$$A_n = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

(IV) La *media cuadrática* Q_n es

$$Q_n = \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

Lema 7. *Para cualesquiera n números reales positivos $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ se cumple que*

$$0 < H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n,$$

es decir,

$$0 \leq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

y las igualdades se cumplen si y sólo si $x_1 = \cdots = x_n$.