Última actualización: 1 de junio de 2021

Ayudantía 06

En la ayudantía anterior vieron la definición de función par y de función impar y es preciso recordarlas pues en esta ayudantía las ocuparemos:

Definición 1 *Una función f es:*

(1) ***Par*** *si $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in Dom(f)$.*

(2) ***Impar*** *si $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in Dom(f)$.*

Algunas "descomposiciones" de funciones

Observación 2 *Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. El primer requisito para que f sea una función par o impar es que para cada $x \in A$ se cumpla que $-x \in A$. De lo contrario, no tendría sentido pensar en $f(-x)$.*

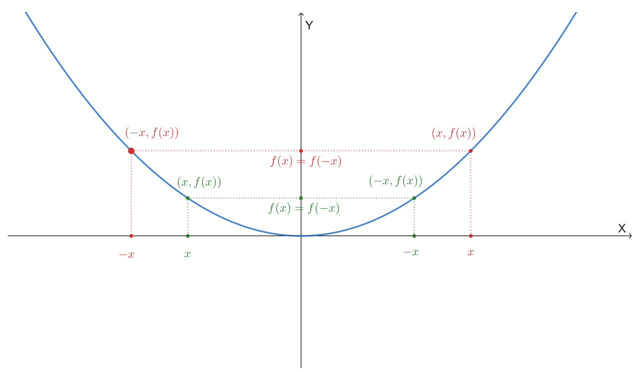

Figura 1: "Graficamente" una función par es simétrica respecto al eje X.

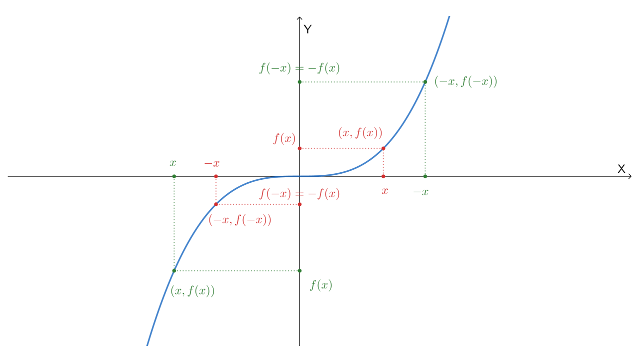

Figura 2: "Graficamente" una función impar es simétrica respecto al punto $(0, 0)$.

Por supuesto que existen funciones que no son pares ni impares, por ejemplo la función $f(x) = 1 + x$ no es par ni impar. Pero hay una manera de escribir cualquier función en términos de funciones pares e impares, esto lo veremos en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 3 *Demuestre que:*

(a) Cualquier función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se puede escribir como $f = P + I$ donde P es una función par e I una función impar.

(b) Esta forma de escribir f es única.

Solución.

(a) Consideremos las funciones P e I dadas por las siguientes reglas de correspondencia

$$P(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{y} \quad I(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Note que

$$P(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = P(x)$$

y que

$$I(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -I(x),$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Esto es, P es una función par e I una función impar. Finalmente, es claro que $f(x) = P(x) + I(x)$, para toda $x \in \mathbb{R}$.

¡Momento! ¿Cómo se ocurren las funciones P e I? ¿A caso fue magia? Por supuesto que no, lo anterior, en realidad, se ocurre de la siguiente manera: Necesitamos dos funciones P e I que cumplan que

$$P(-x) = P(x), \tag{1}$$
$$I(-x) = -I(x) \tag{2}$$

y

$$f(x) = P(x) + I(x) \tag{3}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Ahora, usando (3) con $-x$, tenemos que

$$f(-x) = P(-x) + I(-x)$$

y luego, de (1) y (2), se sigue que

$$f(-x) = P(x) - I(x). \tag{4}$$

Así, sumando (3) y (4) tenemos que $P(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ y luego que $I(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$, para toda $x \in \mathbb{R}$.

(b) Si E es una función par y O una función impar que satisfacen que $f(x) = E(x) + O(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$, entonces también satisfacen que $f(-x) = E(x) - O(x)$, de donde $E(x) = P(x)$ y $O(x) = I(x)$, para cada $x \in Dom(f)$. Así, $E = P$ y $O = I$.

■

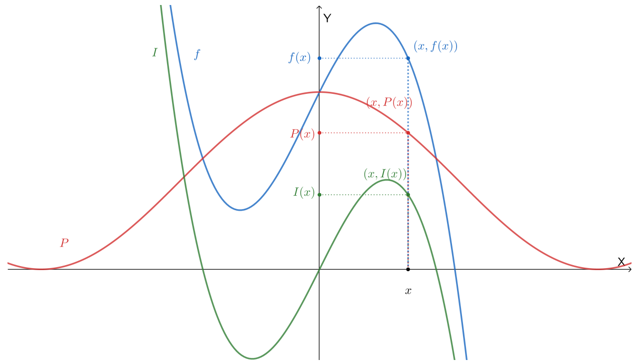

Figura 3: Cualquier función f se puede escribir como la suma de una función par P con una función impar I.

Antes del siguiente ejercicio debemos introducir la siguiente notación:

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, denotamos por $\text{máx}(a, b)$ al elemento mayor del conjunto $\{a, b\}$ y por $\text{mín}(a, b)$ al elemento menor del mismo conjunto. Por ejemplo,

$$\text{máx}(-2, -5) = -2 \quad \text{y} \quad \text{mín}(-2, -5) = -5.$$

En la demostración de la siguiente proposición podremos poner en práctica el uso de algunas propiedades básicas de los números reales.

Proposición 4 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$\text{máx}(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2} \quad y \quad \text{mín}(a, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2}.$$

Demostración. Mostraremos solo la afirmación para $\text{máx}(a, b)$, pues la demostración de la otra afirmación es análoga y un buen ejercicio para practicar.

Por la propiedad de Tricotomía, tenemos tres casos, $a < b,\ a = b$ o $a > b$.

Si $a = b$, entonces $\text{máx}(a, b) = a$ y por otro lado

$$\frac{a + b + |a - b|}{2} = \frac{a + a + |a - a|}{2} = \frac{2a}{a} = a.$$

Por lo que, en este caso, $\text{máx}(a, b) = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$.

Supongamos ahora que $a < b$. En este caso ocurre que $\text{máx}(a, b) = b$ y

$$\frac{a + b + |a - b|}{2} = \frac{a + b + b - a}{2} = \frac{2b}{2} = b,$$

es decir, $\text{máx}(a, b) = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$.

Finalmente, si $a > b$, se tiene que que $\text{máx}(a, b) = a$ y

$$\frac{a + b + |a - b|}{2} = \frac{a + b + a - b}{2} = \frac{2a}{2} = a,$$

es decir, $\text{máx}(a, b) = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$. $\blacksquare$

Definición 5 *Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Definimos:*

(1) La función $|f| : A \longrightarrow \mathbb{R}$ como la función dada por

$$|f|(x) = |f(x)|.$$

(2) La función $\text{máx}(f, g) : A \longrightarrow \mathbb{R}$ como la función dada por

$$\text{máx}(f, g)(x) = \text{máx}\left(f(x), g(x)\right).$$

(3) La función $\text{mín}(f, g) : A \longrightarrow \mathbb{R}$ como la función dada por

$$\text{mín}(f, g)(x) = \text{mín}\left(f(x), g(x)\right).$$

Ejercicio 6 *Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones. Halle una expresión para $\text{máx}(f, g)$ y $\text{mín}(f, g)$ en términos de f y g.*

Solución. Se sigue de la Proposición 4 que

$$\text{máx}(f, g)(x) = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} \quad \text{y} \quad \text{mín}(f, g)(x) = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2},$$

para cada $x \in A$. Por lo tanto,

$$\text{máx}(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2} \quad \text{y} \quad \text{mín}(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2}.$$

■

Ejercicio 7 *Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Demuestre que*

$$f = \text{máx}(f, 0) + \text{mín}(f, 0),$$

donde 0 denota la función constante cero en A.

Solución. Debemos demostrar que

$$f(x) = \text{máx}(f(x), 0) + \text{mín}(f(x), 0),$$

para todo $x \in A$. Sea $x \in A$. Note que basta considerar dos casos, $f(x) \leq 0$ o $f(x) > 0$.

Supongamos primero que $f(x) \leq 0$, entonces

$$\text{máx}(f(x), 0) = 0 \quad \text{y} \quad \text{mín}(f(x), 0) = f(x).$$

Así,

$$\text{máx}(f(x), 0) + \text{mín}(f(x), 0) = 0 + f(x) = f(x).$$

Ahora, si $f(x) > 0$, entonces

$$\text{máx}(f(x), 0) = f(x) \quad \text{y} \quad \text{mín}(f(x), 0) = 0.$$

De donde,

$$\text{máx}(f(x), 0) + \text{mín}(f(x), 0) = f(x) + 0 = f(x).$$

En cualquier caso,

$$f(x) = \text{máx}(f(x), 0) + \text{mín}(f(x), 0).$$

■

Definición 8 *Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Definimos:*

(1) ***La parte positiva de** f, denotada por f^+ como*

$$f^+ = \text{máx}(f, 0).$$

(2) ***La parte negativa de** f, denotada por f^- como*

$$f^- = -\text{mín}(f, 0).$$

Observación 9 *Las funciones f^+ y f^- son no negativas, es decir, $f^+(x) \geq 0$ y $f^-(x) \geq 0$ para todo x. Además $f = f^+ - f^-$*

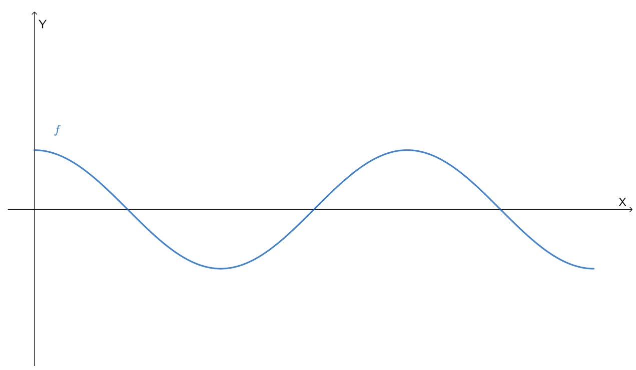

Figura 4: Se muestra la gráfica de una función f.

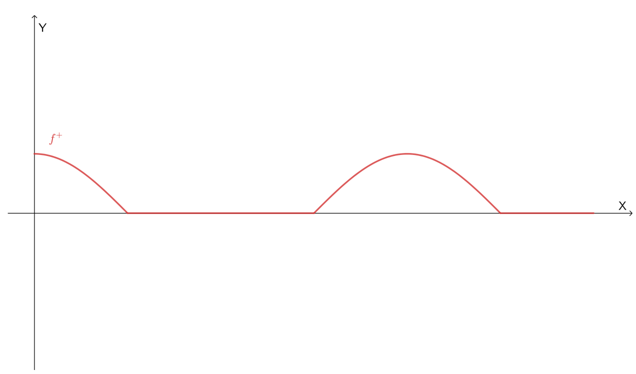

Figura 5: Se muestra la gráfica de la función f^+.

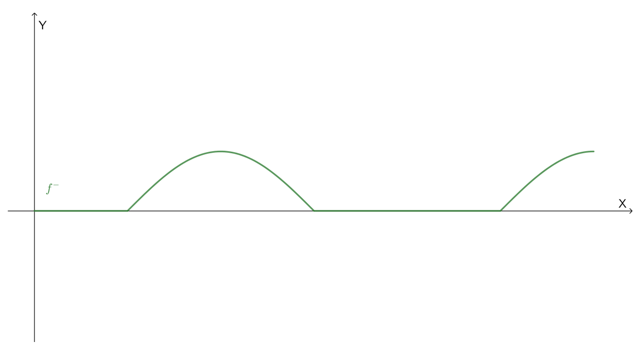

Figura 6: Se muestra la gráfica de la función f^-.