suma

(A1) La suma es asociativa. Para cualesquiera números reales a, b y c se cumple que:

$$(a+b)+c = a+(b+c).$$

(A2) Existe un elemento neutro para la suma. Existe un número real, que denotaremos por 0, tal que

$$a+0 = 0+a = a.$$

(A3) Existen inversos aditivos. Para cualquier número real a existe un número real b tal que

$$a+b = b+a = 0.$$

(A4) La suma es conmutativa. Para cualesquiera números reales a y b se cumple que

$$a+b = b+a.$$

Axiomas de Campo

producto

(A5) La multiplicación es asociativa. Para cualesquiera números reales a, b y c se cumple que:

$$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c).$$

(A6) Existe un elemento neutro para la multiplicación. Existe un número real, distinto del 0, que denotaremos por 1, tal que

$$a\cdot 1 = 1\cdot a = a.$$

(A7) Existen inversos multiplicativos. Para cualquier número real a, distinto de 0, existe un número real b tal que

$$a\cdot b = b\cdot a = 1.$$

(A8) La multiplicación es conmutativa. Para cualesquiera números reales a y b se cumple que

$$a\cdot b = b\cdot a.$$

(A9) Distributividad. Para cualesquiera números reales a, b y c se cumple que:

$$\boxed{a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c.}$$

Axiomas de Orden

(A10) Ley de tricotomía. Para todo número real a se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

(a) $a = 0$,

(b) a pertenece a $\mathbb{R}^+$,

(c) $-a$ pertenece a $\mathbb{R}^+$.

$\mathbb{R}^+$ "números reales positivos"

(A11) $\mathbb{R}^+$ es cerrado bajo la suma. Si a y b pertenecen a $\mathbb{R}^+$, entonces $a+b$ pertenece a $\mathbb{R}^+$.

(A12) $\mathbb{R}^+$ es cerrado bajo el producto. Si a y b pertenecen a $\mathbb{R}^+$, entonces ab pertenece a $\mathbb{R}^+$.

Teorema 1 *En lo siguiente a, b y c son números reales cualesquiera, a menos que se diga otra cosa. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) ***Ley de cancelación para la suma.*** *Si $a + b = a + c$, entonces $b = c$.*

(2) ***El cero es único.*** *Si x es un número real que cumple que $x + a = a$ para todo a, entonces $x = 0$. El hecho de que el neutro aditivo sea único es la razón de denotarlo con el "símbolo" fijo 0 (de hecho, acostumbramos ponerle nombre a lo que es único, ¿no?) .*

(3) ***El inverso aditivo, de cada número, es único.*** *Si b y c son, cada uno, un inverso aditivo de a, entonces $b = c$. Por esta razón denotaremos por $-a$ al inverso aditivo de a.*

(4) ***Ley de cancelación para el producto.*** *Si $a \cdot b = a \cdot c$ y a es distinto de 0, entonces $b = c$.*

(5) ***El uno es único.*** *Si x es un número real que cumple que $x \cdot a = a$, para todo a, entonces $x = 1$. Igual que en el caso del cero, esta es la razón para denotar al neutro multiplicativo por un "símbolo" fijo, es decir, por 1.*

(6) ***El inverso multiplicativo, de cada número, es único.*** *Si a es distinto de cero y tanto b como c son inversos multiplicativos de a, entonces $b = c$. Por esta razón denotaremos por a^{-1} o bien por $1/a$ al inverso multiplicativo de a.*

(7) ***Multiplicar por cero da cero.*** *$a \cdot 0 = 0$, para todo a.*

(8) ***Si un producto es cero, alguno de los factores es cero.*** *Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.*

(9) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$

(10) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

sumar el inverso aditivo de "b" a "a"

$$\boxed{a + (-b) = a - b}$$

(11) $-(-a) = a$

(12) $a(b-c) = ab - ac$

(13) $-(b-a) = a-b$

Teorema 4 *Sean a, b y c números reales. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) ***Propiedad de tricotomía.*** *Para a y b se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:*

  (a) $a = b$

  (b) $a < b$,

  (c) $b < a$.

(2) ***Transitividad.*** *Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.*

(3) *Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.*

(4) *Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.*

(5) *Si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$.*

(6) *Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.*

(7) *Si $a < b$, entonces $-a > -b$.*

(8) *Si $ab > 0$, entonces a y b son ambos positivos o ambos negativos.*

(9) *Si $a < c$ y $b < d$, entonces $a + b < c + d$.*

Ejercicios:

1) Si $a > 1 \rightarrow a^2 > a$

hipótesis

dem: como $a > 1$ y $\boxed{1 > 0} \rightarrow a > 0$

entonces $a \cdot a > 1 \cdot a \rightarrow \boxed{a^2 > a}$ ■

hipótesis

2) Si $0 < \boxed{a < 1}$ entonces $a^2 < a$

coma $\boxed{a > 0}$ y $a < 1$ se tiene que

$a \cdot a < 1 \cdot a \rightarrow \boxed{a^2 < a}$ ■

3) Si $0 \leq a < b$ y $0 \leq c < d \rightarrow ac < bd$

dem: de la hipótesis sabemos que $\boxed{b - a > 0}$

y $d - c > 0$, es decir ambos son elementos de

$\mathbb{R}^+$. $\quad (b-a)d + \boxed{(d-c)a} > 0$

$\rightarrow (bd - ad) + (da - ca) > 0$

$\rightarrow bd - ad + ad - ac > 0$

$\rightarrow bd - ac + (-ad + ad) > 0$

$\rightarrow \boxed{bd - ac > 0} \rightarrow bd > ac.$

$\therefore ac < bd$ ■

4.) si $a, b \geq 0$ se cumple que

$$\boxed{a < b} \text{ si y sólo sí } a^2 < b^2$$

dem: supongamos $a < b$. entonces $b - a > 0$

y como ambos son positivos o cero se tiene que $(b-a)a \geq 0$ y $(b-a)b \geq 0$

$\Leftrightarrow (b-a)a + (b-a)b > 0$

$\Leftrightarrow ba - a^2 + b^2 - ab > 0$

$\Leftrightarrow (ba - ba) + b^2 - a^2 > 0$

$\Leftrightarrow 0 + b^2 - a^2 > 0$

$\Leftrightarrow \boxed{b^2 - a^2 > 0} \rightarrow b^2 > a^2$. $\boxed{a^2 < b^2}$ ■

Sop. $a^2 < b^2 \rightarrow b^2 - a^2 > 0$

$\rightarrow b^2 - a^2 + (ba - ba) > 0$

$\rightarrow (b-a)a + (b-a)b > 0$

$\rightarrow (b-a)a \geq 0$, $(b-a)b \geq 0$ $\rightarrow$ $b - a > 0$, $b > a$

5.) si $\boxed{0<a}$ entonces $\boxed{0 < \frac{1}{a}}$

inciso (8) teorema 4 clase 2

Recordemos a) $a\left(\frac{1}{a}\right) = aa^{-1} = 1$

b) $1 > 0$

dem: $\boxed{\text{como } a \text{ es positivo}}$ y sabemos que $a\left(\frac{1}{a}\right) = 1 > 0 \rightarrow a\left(\frac{1}{a}\right) > 0$

entonces $\left(\frac{1}{a}\right) > 0$ ■

6. si $0 < a < b$ entonces $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

dem: de la hipótesis sabemos $\xrightarrow{b>a} (b-a) > 0$

y como $\frac{1}{b}$ y $\frac{1}{a}$ son ambos positivos

entonces $\left(\frac{1}{ab}\right) > 0$. Por lo tanto $\boxed{\frac{b-a}{ab} > 0}$

$abb^{-1} - aa^{-1}b$

$\rightarrow \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} > 0 \rightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$

$\therefore \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$ ■