Última actualización: 3 de junio de 2021

Clase 10

No hay fecha que no se cumpla, plazo que no se venza, ni deuda que no se pague, así que en esta ocasión, por fin, enunciaremos el último axioma del conjunto de números reales.

El Axioma del Supremo

Definición 1 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Diremos que A es:*

(1) ***Acotado superiormente*** *si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq M$, para todo $a \in A$. En este caso a M lo llamamos una cota superior de A.*

(2) ***Acotado inferiormente*** *si existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq a$, para todo $a \in A$. A M lo llamamos una cota inferior de A.*

(3) ***Acotado*** *si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|a| \leq M$, para todo $a \in A$. Note que en este caso M es una cota superior de A y $-M$ es una cota inferior de A.*

Observación 2 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Note que si A es un conjunto acotado superiormente, respectivamente inferiormente, entonces existe $M \in \mathbb{R}$ una cota superior, respectivamente $m \in \mathbb{R}$ una cota inferior, de A y por lo tanto hay una infinidad de cotas superiores, respectivamente inferiores, por ejemplo $M+1,\ M+2,\ M+3\ldots,$ respectivamente $\ldots, m-2, m-1$.*

Ejemplo 3 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y finito. Demuestre que A es acotado tanto superiormente como inferiormente.*

Solución. Como A es finito, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ fijo y números reales $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ tales que $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Note entonces que a_1 es una cota inferior de A y a_n una cota superior de A. ■

Ejemplo 4 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$. Demuestre que los conjuntos $(a,b),\ [a,b),\ (a,b]$ y $[a,b]$ son acotados tanto inferiormente como superiormente.*

Solución. Mostraremos solo que $[a,b)$ es acotado tanto inferiormente como superiormente. Recordemos que

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\},$$

por lo que es claro que a es una cota inferior y b una cota superior de $[a,b)$. ■

Ejemplo 5 *Sea $a \geq 0$. Muestre que el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq a\}$ es un conjunto no vacío y acotado superiormente.*

Solución. Note que si $a = 0$, entonces $A = \{0\}$, que claramente es un conjunto no vacío y acotado superiormente (por ejemplo, 1 es cota superior de A).
Supongamos entonces que $a > 0$. Se tiene que $(1+a)^2 > a$, de donde $a(1+a)^2 > a^2 > 0$. Luego,

$$0 < \frac{a^2}{(1+a)^2} < a.$$

Así que $\dfrac{a}{(1+a)} \in A$, por lo que $A \neq \varnothing$.

Finalmente, note que si $x \in A$, entonces $x^2 \leq a < (1+a)^2$ y de aquí que $x < 1+a$, es decir, $1+a$ es una cota superior de A. ■

Definición 6 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío. Un número $\alpha \in \mathbb{R}$ es llamado* ***el supremo de*** *A, denotado por* $\sup A$, *si:*

(1) α es cota superior de A y

(2) si M es otra cota superior de A, entonces $\alpha \leq M$.

Observación 7 *El supremo de un conjunto $A \neq \varnothing$ es la mínima cota superior de A.*

Enseguida enunciamos el **axioma del supremo**:

(A13) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Si A es no vacío y acotado superiormente, entonces existe el supremo de A, es decir, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha = \sup A.$$

Ejemplo 8 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y finito. Demuestre que existe* $\sup A$ *y hállelo.*

Solución. Supongamos que A es como en el Ejercicio 3. Claramente es no vacío y además ya vimos que a_n es una cota superior de A, así que, por el Axioma del supremo, existe $\sup A$.

Veamos ahora que $a_n = \sup A$. Como ya sabemos que a_n es una cota superior de A solo resta mostrar que si M es otra cota superior de A, entonces $a_n \leq M$. Sea $M \in \mathbb{R}$ una cota superior de A, entonces $a_i \leq M$, para toda $i \in \{1, ..., n\}$, en particular

$$a_n \leq M.$$

Así, $a_n = \sup A$. $\blacksquare$

Ejemplo 9 *Sea $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Muestre que existe el supremo del conjunto $[a, b)$ y hállelo.*

Solución. Primero note que $a \in [a, b)$, por lo que $[a, b) \neq \varnothing$. Ahora, en el Ejercicio 4 vimos que $[a, b)$ es acotado superiormente, así que, por el Axioma del supremo, existe $\sup[a, b)$.

Veamos que $\sup[a, b) = b$. Para ello solo basta demostrar que si M es una cota superior de $[a, b)$, entonces $b \leq M$. Supongamos que no es así, es decir, que existe M una cota superior de $[a, b)$ de tal manera que $M < b$. Como M es cota superior de $[a, b)$, se tiene que $a \leq M$. Así,

$$a \leq M < \frac{b + M}{2} < b,$$

de donde $\frac{b + M}{2} \in [a, b)$, pero esto contradice el hecho de que M sea una cota superior de $[a, b)$ pues $M \leq \frac{b + M}{2}$. Así, $b \leq M$. Por lo tanto, $\sup[a, b) = b$. $\blacksquare$

Observación 10 *El supremo de un conjunto A puede o no pertenecer al conjunto, por ejemplo, el supremo de un conjunto finito pertenece al conjunto (vea Ejercicio 8) y el supremo del intervalo $[a, b)$ no pertenece a $[a, b)$.*

Como seguramente ya lo sospechan el siguiente paso es demostrar y hallar el supremo del conjunto A del Ejercicio 5, pero esto lo dejaremos para la próxima sesión.