Última actualización: 15 de junio de 2021

Clase 13

En esta ocasión toca estudiar unas funciones muy particulares, las sucesiones, y además introduciremos un concepto fundamental para este curso, el de límite.

Sucesiones y límites de sucesiones

Definición 1 *Una sucesión es una función que tiene como dominio al conjunto de los números naturales.*

Notación: Si $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una sucesión, denotaremos por a_n a la imagen de $n \in \mathbb{N}$ bajo a, es decir,

$$a_n = a(n)$$

y a la sucesión a la denotaremos por $\{a_n\}$. Así, $\{n\}$, $\{(-1)^n\}$ y $\{1/n\}$ denotan a las sucesiones $a, b, c : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\begin{aligned} a_n &= n \\ b_n &= (-1)^n \\ c_n &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Cuyos primeros cinco terminos son

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5;$$

$$-1, 1, -1, 1, -1$$

y

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5},$$

respectivamente.

Como funciones que son, las sucesiones se pueden graficar, vea figura 1. Aunque es más fácil observar el "comportamiento" de la sucesión si se grafica solo las imágenes, vea figura 2.

Las gráficas de la figura 2 nos hacer pensar que la sucesión $\{a_n\}$ "se va hacia infinito", que la sucesión $\{b_n\}$ "da saltos entre -1 y 1" y que la sucesión $\{c_n\}$ "se va hacia cero".

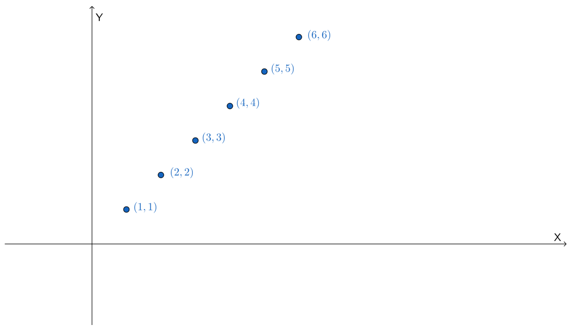
Definición 2 *Sean $\{a_n\}$ una sucesión y $l \in \mathbb{R}$. Diremos que $\{a_n\}$ converge a l, denotado por $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ o por $a_n \longrightarrow l$, si para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que para todos los números naturales $n \geq N$ se tiene que*

$$|a_n - l| < \varepsilon.$$

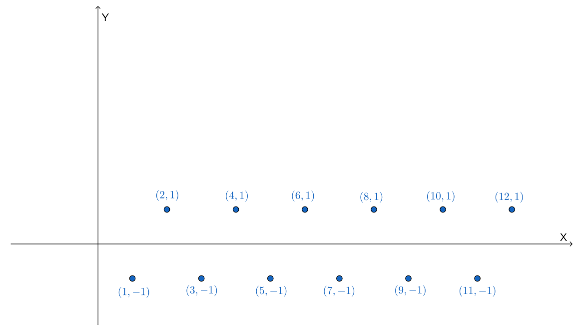
Observación 3 *En la definición anterior:*

(1) El número $N \in \mathbb{N}$ depende del número ε, formalmente deberíamos escribir $N(\varepsilon)$, pero para no hacer pesada la notación solo escribiremos N.

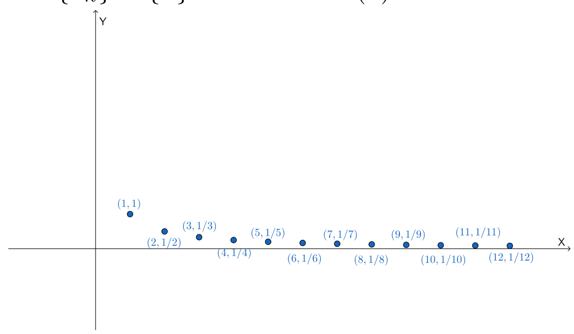
(2) Recuerde que la desigualdad $|a_n - l| < \varepsilon$ es equivalente a que $a_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$. Así, $\{a_n\}$ converge a l si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ de tal manera que $a_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$, para todo $n \geq N$.



(a) Gráfica de la sucesión $\{a_n\} = \{n\}$.



(b) Gráfica de la sucesión $\{b_n\} = \{(-1)^n\}$.



(c) Gráfica de la sucesión $\{c_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$

Figura 1

Ejemplo 4 *Demuestre que la sucesión $\{1/n\}$ converge a cero.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Debemos hallar un número $N \in \mathbb{N}$, de tal manera que para todo número natural $n \geq N$ se cumpla que

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Por el Corolario 7 de la Clase 11, sabemos que, para el $\varepsilon > 0$ dado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Ahora, si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $n \geq \mathbb{N}$, entonces $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{N}$. Así, para todo número natural $n \geq N$, se tiene que

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

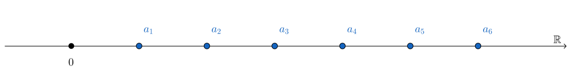
Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

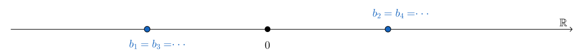
$\blacksquare$

Ejemplo 5 *Muestre que para cualquier $l \in \mathbb{R}$ la sucesión $\{(-1)^n\}$ no converge a l.*

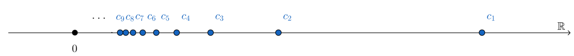
Demostración. Analizaremos tres casos, cuando $l > 0$, cunado $l = 0$ y cuando $l < 0$.



(a) Gráfica de la sucesión $\{a_n\} = \{n\}$.



(b) Gráfica de la sucesión $\{b_n\} = \{(-1)^n\}$.



(c) Gráfica de la sucesión $\{c_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$

Figura 2

Si $l > 0$, consideremos $\varepsilon = \dfrac{l}{2}$. Así, si N es cualquier natural, se tiene que

$$(-1)^n = -1 \notin \left(\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}\right) = (l - \varepsilon, l + \varepsilon),$$

para cualquier número natural impar $n \geq N$. Por lo que $\{(-1)^n\}$ no converge a l.

Ahora, si $l = 0$, basta considerar $\varepsilon = 1/2$, pues en este caso

$$(-1)^n \notin \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon),$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Así, si $l = 0$, $\{(-1)^n\}$ no converge a l.

Finalmente, si $l < 0$, consideremos $\varepsilon = \dfrac{-l}{2}$. Luego, para cualquier natural N podemos elegir un número natural par $n \geq N$ y se tiene que

$$1 = (-1)^n \notin \left(\frac{3l}{2}, \frac{l}{2}\right) = (l - \varepsilon, l + \varepsilon).$$

Por lo que, si $l < 0$, $\{(-1)^n\}$ no converge a l.

En cualquier caso, $\{(-1)^n\}$ no converge a l. ■