Última actualización: 21 de junio de 2021

Clase 15

La sesión anterior enunciamos y demostramos el Teorema sobre la aritmética de límites de sucesiones. Este teorema nos permite, a tráves de operaciones "básicas", obtener "muchas" sucesiones convergentes a partir de unas cuantas sucesiones convergentes conocidas.

En esta ocasión enunciaremos y demostraremos un teorema que nos permite concluir que una sucesión converge a partir de otras dos sucesiones convergentes y el "orden" que estas tienen. Dicho teorema da título a esta clase.

El Teorema del Sándwich

Lema 1 *Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Si $a_n \geq 0$, para toda $n \in \mathbb{N}$, y $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, entonces $l \geq 0$.*

Demostración. Supongamos que $a_n \geq 0$, para toda $n \in \mathbb{N}$, que $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, pero que $l < 0$. Como $\{a_n\}$ converge a l, para el número positivo $-l$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n \geq N$,

$$|a_n - l| < -l.$$

Así, tenemos que $l < a_n - l < -l$, para toda $n \geq N$, y de aquí que

$$a_n < 0,$$

para toda $n \geq N$. Lo que es una contradicción al hecho de que $a_n \geq 0$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Concluimos entonces que $l \geq 0$. ∎

Corolario 2 *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones. Si $a_n \leq b_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = m$, entonces $l \leq m$.*

Demostración. Consideremos la sucesión $\{b_n - a_n\}$. Se tiene que $b_n - a_n \geq 0$, para toda $n \in \mathbb{N}$, pues $a_n \leq b_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Ahora, usando que $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ convengen a l y m, respectivamente, y el inciso (c) del Teorema 8 de la Clase 14, se tiene que la sucesión $\{b_n - a_n\}$ converge y

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = m - l.$$

Luego, por el lema anterior, se tiene que $m - l \geq 0$, de donde $m \geq l$. ∎

En la demostración del siguiente resultado será tentador usar el corolario anterior, pero debemos tener cuidado, pues para usar dicho corolario es necesario tener como hipótesis la convergencia de todas las sucesiones involucradas.

Teorema 3 (del Sándwich) *Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ tres sucesiones tales que $a_n \leq b_n \leq c_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Si $\lim_{n\to} a_n = l = \lim_{n\to\infty} c_n$, entonces la sucesión $\{b_n\}$ converge a l, es decir,*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = l.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como $a_n \leq b_n \leq c_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$|b_n - a_n| \leq |c_n - a_n|, \tag{1}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$, para el número positivo $\varepsilon/3$, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que:

(I) $|a_n - l| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, para toda $n \geq N_1$.

(II) $|c_n - l| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, para toda $n \geq N_2$.

Así, si $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, se tiene, para $n \geq N$, que

$$\begin{aligned}
|b_n - l| &= |b_n - a_n + a_n - l| && (2)\\
&\leq |b_n - a_n| + |a_n - l| && (3)\\
&\leq |c_n - a_n| + |a_n - l| && (4)\\
&= |c_n - l + l - a_n| + |a_n - l| && (5)\\
&\leq |c_n - l| + |l - a_n| + |a_n - l| && (6)\\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} && (7)\\
&= \varepsilon, && (8)
\end{aligned}$$

donde las desigualdades en (3) y (6) se siguen de la desigualdad del triángulo; la desigualdad en (4) se tiene por (1) y la desigualdad en (7) se obtiene por (I) y (II). Por lo tanto, $\{b_n\}$ converge a l. ■

El siguiente diagrama ayuda a recordar el Teorema del Sándwich.

$$\begin{tikzcd}
 & a_n \arrow[d] & \leq & b_n \arrow[dd] & \leq & c_n \arrow[d] \\
n\to\infty & l & & & & l \\
 & & & l & &
\end{tikzcd}$$

Definición 4 *Sean $a \geq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Un número real x es llamado raíz n-ésima de a si*

$$x^n = a.$$

Denotamos por $\sqrt[n]{a}$ a la raíz n-ésima positiva de a.

Ejemplo 5 *Sea $a > 1$. Muestre que la sucesión $\left\{\sqrt[n]{a}\right\}$ converge.*

Demostración. Note que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\sqrt[n]{a} > 1$ (¿por qué?). Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un número $h_n > 0$ tal que

$$\sqrt[n]{a} = 1 + h_n. \tag{9}$$

Observe que de esta manera obtenemos una sucesión $\{h_n\}$. Ahora, por el Lema 4 (la desigualdad de Bernoulli) de las notas tituladas Contenido extra 01 y la igualdad (9), tenemos para cada $n \in \mathbb{N}$ que

$$a = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n,$$

de donde,

$$\frac{a-1}{n} \geq h_n, \tag{10}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Note que tenemos tres sucesiones, $\{0\}$, $\{h_n\}$ y $\left\{\frac{a-1}{n}\right\}$, que, por (10), cumplen

$$0 \leq h_n \leq \frac{a-1}{n},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Más aún, las sucesiones $\{0\}$ y $\left\{\frac{a-1}{n}\right\}$ convergen a cero. Así, por el Teorema del Sándwich, se tiene que la sucesión $\{h_n\}$ converge a cero.

Finalmente, de la igualdad (9), se sigue que la sucesión $\left\{\sqrt[n]{a}\right\}$ converge y que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (1 + h_n) = 1.$$

$\blacksquare$