Última actualización: 22 de junio de 2021

Clase 16

En las sesiones anteriores hemos estudiado resultados que son consecuencia de que algunas sucesiones sean convergentes. En esta ocasión comenzaremos a estudiar resultados que nos permitan decidir cuándo una sucesión es convergente sin ocupar, o comparar, con otras sucesiones.

Criterios de Convergencia (1ra. parte)

Definición 1 *Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es una función:*

*(1) **creciente** si $f(x) < f(y)$ para cualesquiera $x, y \in A$ que cumplan que $x < y$.*

*(2) **no decreciente** si $f(x) \leq f(y)$ para cualesquiera $x, y \in A$ que cumplan que $x < y$.*

*(3) **decreciente** si $f(x) > f(y)$ para cualesquiera $x, y \in A$ que cumplan que $x < y$.*

*(4) **no creciente** si $f(x) \geq f(y)$ para cualesquiera $x, y \in A$ que cumplan que $x < y$.*

Como las sucesiones son funciones tenemos los conceptos de sucesión creciente, no decreciente, decreciente y no creciente.

Definición 2 *Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Diremos que $\{a_n\}$ es una sucesión:*

*(1) **creciente** si $a_n < a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

*(2) **no decreciente** si $a_n \leq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

*(3) **decreciente** si $a_n > a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

*(4) **no creciente** si $a_n \geq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Observación 3 *Note que:*

(1) f creciente $\Rightarrow$ f no decreciente.

(2) f decreciente $\Rightarrow$ f no creciente.

Y lo mismo ocurre para sucesiones.

Ejemplo 4 *Dado $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1}$. Así, la sucesión $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ es un ejemplo de una sucesión decreciente.*

Teorema 5 *Si $\{a_n\}$ es una sucesión no decreciente y acotada superiormente, entonces $\{a_n\}$ converge.*

Demostración. Consideremos el conjunto $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Se tiene que A es un conjunto no vacío y, por hipótesis, acotado superiormente, así que, por el Axioma del Supremo, existe $\alpha = \sup A$. Mostraremos que la sucesión $\{a_n\}$ converge a α.

Sea $\varepsilon > 0$. Por el Lema 1 de la Ayudantía 09, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\alpha - \varepsilon < a_N,$$

esto es,

$$\alpha - a_N < \varepsilon.$$

Ahora, como $\{a_n\}$ es no decreciente, para $n \geq N$, se tiene que $a_N \leq a_n$ y de aquí que $-a_n \leq -a_N$, para toda $n \geq N$. Se sigue que

$$\alpha - a_n \leq \alpha - a_N < \varepsilon,$$

para toda $n \geq N$. Finalmente, como α es cota superior de A, tenemos que $a_n \leq \alpha$, para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde, $\alpha - a_n = |\alpha - a_n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$|\alpha - a_n| < \varepsilon,$$

para toda $n \geq N$, es decir, $\{a_n\}$ converge a α. ■

Ejemplo 6 *Considere la sucesión $\{a_n\}$ definida como sigue*

$$a_1 = \sqrt{2}$$

y

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n}.$$

Muestre que $\{a_n\}$ converge.

Solución. Lo primero que debemos notar es que la sucesión de este ejercicio no está dada por una "fórmula cerrada", es decir, una fórmula que solo dependa de n, por lo que intentar usar todos los resultados acerca de la aritmética de límites no rendirá frutos. Lo que sí podemos notar es que los primeros términos de esta sucesión son

$$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$$

y después de calcular unas aproximaciones de estos, se puede conjeturar que la sucesión es no decreciente y acotada superiormente (por ejemplo por 2), justo las hipótesis del teorema anterior. Demostraremos esta conjetura usando el Principio de Inducción Matemática. Se tiene que

$$0 < \sqrt{2} < 2. \tag{1}$$

Multiplicando (1) por 2 y considerando las raíces cuadradas positivas, se tiene que

$$0 < \sqrt{2\sqrt{2}} < 2. \tag{2}$$

Ahora, multiplicando (1) por $\sqrt{2}$ y considerando las raíces cuadradas positivas, se tiene que

$$0 < \sqrt{2} < \sqrt{2\sqrt{2}}. \tag{3}$$

De (2) y (3), se sigue que $0 < \sqrt{2} < \sqrt{2\sqrt{2}} < 2$, es decir,

$$0 < a_1 < a_2 < 2.$$

Note que hemos demostrado que nuestra conjetura es cierta para $n = 1$. Supongamos ahora que, para $n \in \mathbb{N}$ fijo, se cumple que

$$0 < a_n < a_{n+1} < 2 \tag{4}$$

y demostremos que

$$0 < a_{n+1} < a_{n+2} < 2.$$

Multiplicando por 2 en (4) y luego considerando las raíces cuadradas positivas, se tiene que

$$0 < \sqrt{2a_n} < \sqrt{2a_{n+1}} < 2,$$

es decir,

$$0 < a_{n+1} < a_{n+2} < 2.$$

Así, por el Principio de Inducción Matemática, se tiene que $\{a_n\}$ es una sucesión creciente y acotada superiormente. Finalmente, por el Teorema anterior, $\{a_n\}$ es una sucesión convergente. ■

¿Y a qué número real converge? Eso es algo que este criterio de convergencia no nos proporciona y aunque en la demostración vimos que la sucesión debe converger al supremo, ¡imagínense hallar el supremo de la sucesión de este ejemplo! Pero no hay que perder la esperanza, lo hallaremos, aunque ocuparemos un par de resultados, el primero será un ejercicio para ustedes y el segundo será un "truco" que justificaremos muy pronto.

Ejercicio 7 *Sean $\{a_n\}$ una sucesión, $k \in \mathbb{N}$ fijo y $\{b_n\}$ la sucesión definida como sigue*

$$b_n = a_{n+k},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+k} = l.$$

Así, en el ejemplo que nos ocupa, tenemos que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = l$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n} = l.$$

Y el "truco" es el siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} 2a_n} = \sqrt{2l}.$$

De aquí que l debe cumplir que $l^2 = 2l$. Por lo que $l = 0$ o $l = 2$. Pero, $\sqrt{2} \leq a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que $l = 2$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

Finalmente, enunciamos un corolario al Teorema 5.

Corolario 8 *Si $\{a_n\}$ es una sucesión no creciente y acotada inferiormente, entonces $\{a_n\}$ converge.*