

## Clase 17

La sesión anterior demostramos el siguiente criterio de convergencia:

**Teorema 1** Si  $\{a_n\}$  es una sucesión no decreciente y acotada superiormente, entonces  $\{a_n\}$  converge.

Y enunciamos un corolario de este:

**Corolario 2** Si  $\{a_n\}$  es una sucesión no creciente y acotada inferiormente, entonces  $\{a_n\}$  converge.

En esta sesión continuaremos estudiando los criterios de convergencia de sucesiones y para ello es necesario introducir dos conceptos, el de subsucesión y el de sucesión de Cauchy.

### Criterios de Convergencia (2da. parte)

**Definición 3** Sea  $\{a_n\}$  una sucesión. Decimos que  $\{a_{n_k}\}$  es una **subsucesión** de  $\{a_n\}$  si existe una función  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  creciente tal que  $a \circ g(k) = a_{n_k}$ .

**Observación 4** Una subsucesión de una sucesión es una sucesión en sí misma pues sigue siendo una función de  $\mathbb{N}$  en  $\mathbb{R}$ .

**Ejemplo 5** Si  $\{a_n\}$  es una sucesión, entonces  $\{a_n\}$  es subsucesión de  $\{a_n\}$  porque la función identidad  $\text{Id} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  es estrictamente creciente.

**Ejemplo 6** La sucesión  $\{(-1)^n\}$  tiene como subsucesión a  $\{(-1)^{2k}\} = \{1\}$ , basta considerar la función  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  dada por  $g(k) = 2k$ .

**Ejemplo 7** La sucesión  $\{a_n\}$  tiene como subsucesión a  $\{a_{n+1}\}$ , en este caso, consideramos  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  dada por  $g(n) = n + 1$ .

**Lema 8** Si  $\{a_n\}$  es una sucesión, entonces existe una subsucesión  $\{a_{n_k}\}$  que es o bien no decreciente o bien no creciente.

**Demostración.** Llamaremos *punto cumbre* de la sucesión  $\{a_n\}$  a un número natural  $n$  tal que  $a_n > a_m$  para toda  $m > n$ , vea figura 1.

Analizaremos los dos posibles casos,  $\{a_n\}$  tiene una infinidad de puntos cumbre o  $\{a_n\}$  tiene un número finito de puntos cumbre.

Supongamos, primero, que  $\{a_n\}$  tiene una infinidad de puntos cumbre, digamos

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots \quad (1)$$

Ahora, por definición de punto cumbre, tenemos que

$$a_{n_1} > a_{n_2} > a_{n_3} > \dots > a_{n_k} > \dots \quad (2)$$

De (1) se sigue que la función  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  dada por  $g(k) = n_k$  es creciente y por lo tanto  $a \circ g(k) = a_{n_k}$ , es decir,  $\{a_{n_k}\}$  es una subsucesión de  $\{a_n\}$ . Además, por (2), tenemos que  $\{a_{n_k}\}$  es decreciente, por lo que, en este caso, es la subsucesión deseada.

Supongamos ahora que  $\{a_n\}$  tiene un número finito de puntos cumbre y que  $M$  es el mayor de ellos. Consideremos  $n_1 > M$ . Como  $n_1$  NO es punto cumbre, entonces existe  $n_2 > n_1$  tal que  $a_{n_2} \geq a_{n_1}$ . Recursivamente construimos  $\{n_k\}$  con  $n_{k+1} > n_k$  tal que  $a_{n_{k+1}} \geq a_{n_k}$ . Así, al definir  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  dada por  $g(k) = n_k$  obtenemos que  $g$  es creciente y  $a \circ g(k) = a_{n_k}$ , es decir,  $\{a_{n_k}\}$  es una subsucesión de  $\{a_n\}$  tal que  $a_{n_{k+1}} \geq a_{n_k}$  (es no decreciente). ■

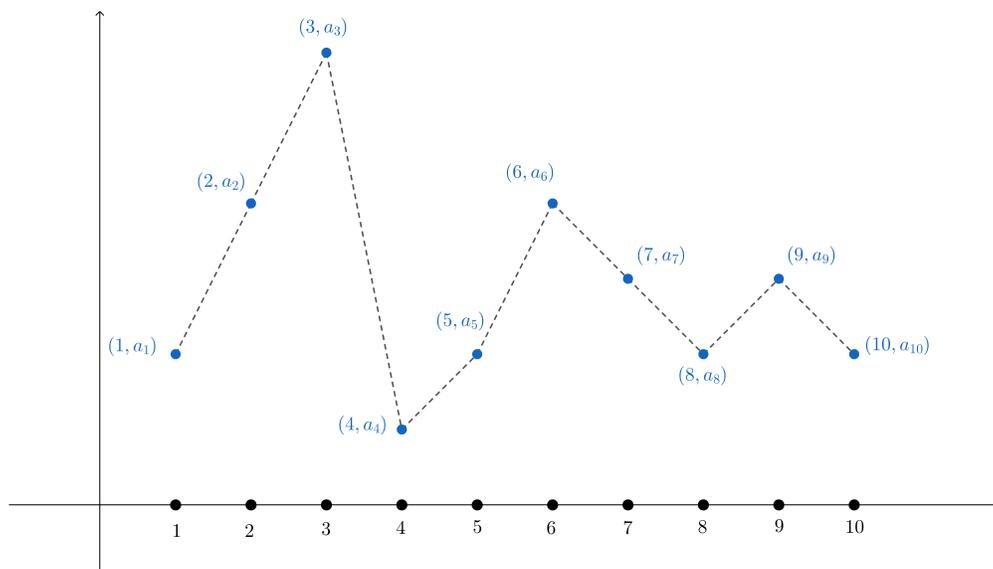


Figura 1: 3 y 6 son puntos cumbre.

**Corolario 9 (Teorema de Bolzano-Weierstrass)** *Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.*

**Demostración.** Sea  $\{a_n\}$  una sucesión acotada. Por el Lema 8, existe  $\{a_{n_k}\}$  una subsucesión no decreciente (o bien no creciente) de  $\{a_n\}$ . Como  $\{a_{n_k}\}$  es una sucesión acotada (*¿por qué?*), entonces por el Teorema 1 (o bien el Corolario 2), se sigue que  $\{a_{n_k}\}$  es convergente. ■

Para concluir esta sesión, introduciremos un concepto que nos permitirá dar otro criterio de convergencia.

**Definición 10** *Sea  $\{a_n\}$  una sucesión. Diremos que  $\{a_n\}$  es una **sucesión de Cauchy** si para toda  $\varepsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $m, n \in \mathbb{N}$  cumplen que  $m, n \geq N$ , entonces  $|a_n - a_m| < \varepsilon$ .*

*Lo anterior suele escribirse como*

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} |a_n - a_m| = 0.$$

**Lema 11** *Si  $\{a_n\}$  es una sucesión de Cauchy, entonces  $\{a_n\}$  es acotada.*

**Demostración.** Como  $\{a_n\}$  es de Cauchy, para el número positivo 1, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n, m \geq N$ , entonces  $|a_n - a_m| < 1$ . En particular, si  $n \geq N$  se cumple que  $|a_n - a_N| < 1$ , de donde

$$|a_n| < 1 + |a_N|$$

para toda  $n \geq N$ . Así, si  $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N|\}$ , entonces

$$|a_n| \leq M,$$

para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Es decir,  $\{a_n\}$  es una sucesión acotada. ■

**Lema 12** *Sea  $\{a_n\}$  una sucesión de Cauchy. Si  $\{a_{n_k}\}$  es una subsucesión convergente de  $\{a_n\}$ , entonces  $\{a_n\}$  también es convergente.*

**Demostración.** Supongamos que  $\{a_{n_k}\}$  converge a alguna  $l \in \mathbb{R}$ . Veamos que  $\{a_n\}$  también converge a  $l$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ . Como  $\{a_{n_k}\}$  converge a  $l$ , para el número positivo  $\varepsilon/2$ , existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n_k \geq N_1$ , entonces

$$|a_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora, como  $\{a_n\}$  es una sucesión de Cauchy, existe  $N_2 \in \mathbb{N}$  tal que para cualesquiera  $m, n \geq N_2$  se cumple que

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así, si  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , se tiene, para  $n \geq N$ , que

$$|a_n - l| \leq |a_n - a_{n_N}| + |a_{n_N} - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

donde el resultado se obtiene porque  $n_N \geq N$  pues la función que permite definir la subsucesión es estrictamente creciente, así que  $n_N \geq N_1$  y por ello  $|a_n - a_{n_N}| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Por lo tanto,  $\{a_n\}$  converge a  $l$ . ■

**Teorema 13** *Sea  $\{a_n\}$  una sucesión. Se cumple que  $\{a_n\}$  es convergente si y sólo si  $\{a_n\}$  es de Cauchy.*

**Demostración.** Supongamos que  $\{a_n\}$  es una sucesión convergente y que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$  para alguna  $\ell \in \mathbb{R}$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ . Entonces existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq N$  entonces  $|a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Luego, si  $m, n \geq N$  se cumple que

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - \ell| + |\ell - a_m| = |a_n - \ell| + |a_m - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto,  $\{a_n\}$  es una sucesión de Cauchy.

Recíprocamente, supongamos que  $\{a_n\}$  es una sucesión de Cauchy. Por el Lema 11,  $\{a_n\}$  es una sucesión acotada. Luego, por el Teorema de Bolzano-Weierstrass (Corolario 9), existe una subsucesión  $\{a_{n_k}\}$  de  $\{a_n\}$  que es convergente. Finalmente, por el Lema 12 obtenemos que  $\{a_n\}$  es una sucesión convergente. ■