Última actualización: 30 de junio de 2021

Clase 18

Antes ya hemos estudiado el concepto de *límite* para sucesiones, en esta ocasión estudiaremos el mismo concepto, pero ahora para funciones en general (funciones reales de una variable real).

Límites de funciones

Consideremos la función dada por la siguiente regla de correspondencia:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}.$$

Es fácil ver que $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, pero puede surgir una pregunta ¿qué ocurre con $f(x)$ si x está "cerca" de 1?

Por ejemplo, si consideramos $x = 0.9$, se tiene que $f(x) = f(0.9) = 2.9$, ahora si $x = 0.99999$ (alguien "más cerca" de 1), entonces $f(x) = f(0.99999) = 2.99999$.

Pero podemos considerar alguien más grande que 1 y "cerca" de 1, por ejemplo, si $x = 1.1$, entonces $f(x) = f(1.1) = 3.1$, o si $x = 1.0001$, entonces $f(x) = f(1.0001) = 3.0001$.

Estos calculos nos sugieren que $f(x)$ se "acerca" a 3 cuando x se "acerca" a 1, pero no tenemos forma de asegurar esto con tan solo cuatro valores para x.

Pensemos ahora en otra función, la función g dada por

$$g(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

En este caso tenemos que $Dom(g) = [-1, 1]$. Ahora, como hicimos con la función f, podríamos considerar un número que no pertenezca al dominio de g y preguntarnos qué ocurre con $g(x)$ si x está "cerca" del número que elegimos. Consideremos, por ejemplo, el número 2, que no pertenece al dominio de g. Esperen, ¡¿tiene sentido preguntarse qué ocurre con $g(x)$ si x está "cerca" de 2?! Claro que no, pues no hay puntos del dominio de g que estén "cerca" de 2.

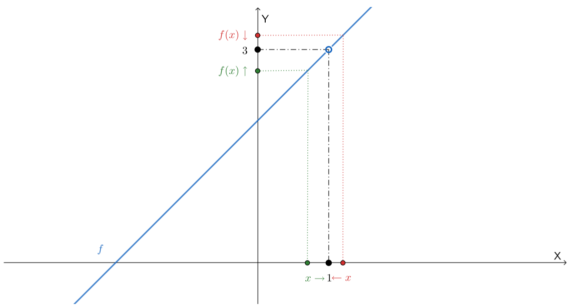
Entonces la pregunta que hemos hecho, tanto para f como para g, tiene sentido si nos podemos "acercar" con puntos del dominio de la función al punto que nos interesa, en otro caso, como el de la función g y el número 2, no tiene sentido, vea figura 1.

El concepto de límite que estamos por introducir se puede pensar como una herramienta para analizar el comportamiento de una función alrededor de un punto, en ocasiones inclusive si el punto no pertenece al dominio de la función.

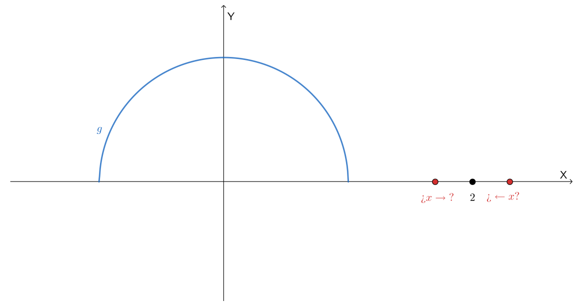
Definición 1 *Sean $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, $c \in \mathbb{R}$ tal que existe $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ con $c \in (a, b)$ y $(a, b) \setminus \{c\} \subseteq A$, y $l \in \mathbb{R}$. Diremos que **el límite de** $f(x)$, **cuando** x **tiende a** c**, es** l, denotado por*

$$\lim_{x \to c} f(x) = l,$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $x \in (a, b)$ que cumple que $0 < |x - c| < \delta$ se tiene que $|f(x) - l| < \varepsilon$.



(a) Es posible “acercarse a 1 con elementos del dominio de f y las imágenes de estos, bajo f, se “acercan” a 3.



(b) No es posible “acercarse” a 2 con elementos del dominio de g, por lo que no tiene sentido preguntarse qué ocurre con $g(x)$ para x “cerca” de 2.

Figura 1

Observación 2 *En la definición anterior:*

(1) El número $\delta > 0$ depende del número ε, formalmente deberíamos escribir $\delta(\varepsilon)$, pero para no hacer pesada la notación solo escribiremos δ.

(2) Recuerde que la desigualdad $|f(x) - l| < \varepsilon$ es equivalente a que $f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$. Así, el límite de $f(x)$, cuando x tiende a c, es l si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de tal manera que para cualquier $x \in (c - \delta, c + \delta) \setminus \{c\}$ se tiene que $f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$.

Ejemplo 3 *Sea $k \in \mathbb{R}$ fijo y f la función constante $f(x) = k$. Muestre que*

$$\lim_{x \to c} f(x) = k,$$

para cualquier $c \in \mathbb{R}$.

Solución. Sea $\varepsilon > 0$. Note que $Dom(f) = \mathbb{R}$, por lo que para cualquier $c \in \mathbb{R}$ existe un intervalo como el requerido en la definición, por ejemplo $(c - 1, c + 1)$.

Ahora, observe que

$$|f(x) - k| = |k - k| = 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, para cualquier $\delta > 0$ se tiene que, si $0 < |x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - k| < \varepsilon$. ■

Ejemplo 4 *Consideremos la función identidad, es decir, la función* $\mathrm{Id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $\mathrm{Id}(x) = x$. *Muestre que, para cualquier $c \in \mathbb{R}$, se tiene que*

$$\lim_{x \to c} \mathrm{Id}(x) = c.$$

Solución. Sea $\varepsilon > 0$. En este caso también se tiene que para cualquier $c \in \mathbb{R}$ existe un intervalo como el requerido en la definición, por ejemplo $(c - 1, c + 1)$. Ahora, note que

$$|\,\mathrm{Id}(x) - c| = |x - c|,$$

por lo que si $\delta = \varepsilon$, se tiene que si $0 < |x - c| < \delta$ entonces $|\,\mathrm{Id}(x) - c| < \varepsilon$. ■

Con la intención de que el material sea más fluido, a partir de ahora, escribiremos cosas como: *Muestre que* $\lim_{x\to c} f(x) = l$. Y en las demostraciones supondremos que existe un intervalo (a, b) tal que $c \in (a, b)$ y que $(a, b) \setminus \{c\} \subseteq Dom(f)$, es decir, supondremos que c es un punto al que nos podemos "acercar" con elementos del dominio de la función, pero de cualquier manera, es un hecho importantísimo que no se debe olvidar.

Ejemplo 5 *Muestre que*

$$\lim_{x\to -2} 7x = -14.$$

Solución. Sea $\varepsilon > 0$. Note que

$$|7x - (-14)| = |7\,(x - (-2))| = 7|x - (-2)|,$$

por lo que si $\delta = \varepsilon/7$, se tiene que $0 < |x - (-2)| < \varepsilon/7$ implica que $|7x - (-14)| < \varepsilon$. Es decir,

$$\lim_{x\to -2} 7x = -14.$$

■

Ejemplo 6 *Sea* $c \in \mathbb{R}$. *Muestre que*

$$\lim_{x\to c} x^2 = c^2.$$

Solución. Sea $\varepsilon > 0$. Note que $|x^2 - c^2| = |x - c||x + c|$, pero en esta ocasión el término $|x + 2|$ no es constante, como el 7 en el ejercicio anterior, así que debemos acotar dicho término. Ahora, como nosotros vamos a exhibir la delta "adecuada" podemos elegir una para acotar el término $|x + 2|$, a esta delta se le suele llamar "delta auxiliar". Supongamos entonces que $|x - c| < 1$, se sigue que $|x| < 1 + |c|$ y de aquí que

$$|x + c| \leq |x| + |c| < 1 + 2|c|.$$

Así, si $0 < |x - c| < 1$, entonces

$$|x^2 - c^2| = |x - c||x + c| < |x - c|\,(1 + 2|c|)\,. \tag{1}$$

Necesitamos entonces que $|x - c|$ sea menor que $\varepsilon/\,(1 + 2|c|)\,$, pero también que ocurra (1). Por lo tanto, si $\delta = \min\{1, \varepsilon/\,(1 + 2|c|)\}$ y $0 < |x - c| < \delta$, entonces $|x^2 - c^2| < \varepsilon$. Esto es,

$$\lim_{x\to c} x^2 = c^2.$$

■