Última actualización: 3 de marzo de 2021

Clase 2

Antes de comenzar esta sesión debo aclarar un par de cosas:

- Al inicio de la sesión anterior escribí (y dije en el vídeo) *el uno es distinto de cero*. Lo que en verdad quería escribir (y decir en el vídeo) era *el uno es mayor que cero*. Este error ya fue corregido en las notas (y en el vídeo).
- Que uno sea distinto de cero es parte del axioma **(A6)** (¿Qué ocurriría si permitieramos que 1=0?).

Ahora sí, podemos iniciar la sesión.

Los axiomas de campo, vistos en la clase anterior, solo nos sirven para justificar ciertas propiedades algebraicas, pero no nos bastan para justificar afirmaciones como *el uno es mayor que cero,* peor aún, ¿qué significa *mayor que*? En esta ocasión estudiaremos los axiomas que nos permiten justificar este tipo de cosas, los axiomas de orden de los números reales.

Axiomas de orden de los números reales

A partir de ahora, denotaremos por $\mathbb{R}$ al conjunto de los números reales y supondremos que existe un subconjunto de los número reales, que llamaremos el conjunto de los **números positivos** y que denotaremos por $\mathbb{R}^+$, que satisface los siguientes axiomas:

(A10) Ley de tricotomía. Para todo número real a se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

(a) $a = 0$,

(b) a pertenece a $\mathbb{R}^+$,

(c) $-a$ pertenece a $\mathbb{R}^+$.

(A11) $\mathbb{R}^+$ es cerrado bajo la suma. Si a y b pertenecen a $\mathbb{R}^+$, entonces $a + b$ pertenece a $\mathbb{R}^+$.

(A12) $\mathbb{R}^+$ es cerrado bajo el producto. Si a y b pertenecen a $\mathbb{R}^+$, entonces ab pertenece a $\mathbb{R}^+$.

A partir de estos axiomas podemos definir los símbolos $<$, $>$, $\leq$ y $\geq$.

Definición 1 *Para dos números reales a y b diremos que:*

*(1) a es **menor que** b y lo denotaremos por $a < b$, si $b - a$ pertenece a $\mathbb{R}^+$,*

*(2) a es **mayor que** b y lo denotaremos por $a > b$, si $b < a$,*

*(3) a es **menor o igual que** b y lo denotaremos por $a \leq b$, si $a < b$ o $a = b$,*

*(4) a es **mayor o igual que** b y lo denotaremos por $a \geq b$, si $a > b$ o $a = b$.*

Observación 2 *Un número a es positivo si y sólo si $a > 0$.*

Definición 3 *Al conjunto de números a que cumplen que $a < 0$, lo llamaremos el conjunto de números negativos y lo denotaremos por $\mathbb{R}^-$.*

Si escribo $8 \leq 10$, ¿es correcto? Según el inciso (3) de la definición anterior, para que $8 \leq 10$ sea verdadera debe suceder que $8 < 10$ o que $8 = 10$ y basta con que ocurra una de estas (de hecho, por **(A10)**, solo puede ocurrir una) y como ocurre la primera, entonces la afirmación $8 \leq 10$ es verdadera. Por supuesto que la afirmación $8 < 10$ también es correcta, tal vez la ventaja de esta última es que es más precisa.

A partir de los axiomas **(A10)**, **(A11)** y **(A12)** y la Definición 1, podemos demostrar algunas propiedades de orden de los números reales.

Teorema 4 *Sean a, b y c números reales. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) ***Propiedad de tricotomía.*** *Para a y b se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:*

(a) $a = b$

(b) $a < b$,

(c) $b < a$.

(2) ***Transitividad.*** *Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.*

(3) *Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.*

(4) *Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.*

(5) *Si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$.*

(6) *Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.*

(7) *Si $a < b$, entonces $-a > -b$.*

(8) *Si $ab > 0$, entonces a y b son ambos positivos o ambos negativos.*

(9) *Si $a < c$ y $b < d$, entonces $a + b < c + d$.*

Demostración. Igual que en teorema de la sesión anterior, demostraremos algunos de los incisos y el resto formará parte de la Tarea 01.

(1) Consideremos el número real $b - a$. Por **(A10),** sabemos que $b - a = 0$ o que $b - a$ pertenece a $\mathbb{R}^+$ o que $-(b - a)$ pertenece a $\mathbb{R}^+$, pero solo ocurre una de estas. Entonces, si ocurre que $b - a = 0$, se sigue que $b = a$. Si ocurre que $b - a$ pertenece a $\mathbb{R}^+$, según la Definición 1, se sigue que $a < b$. Finalmente, si ocurre que $-(b - a) = a - b$ (¿puede demostrar esta igualdad) pertenece a $\mathbb{R}^+$, de la Definición 1, se tiene que $b < a$.

(2) Dado que $a < b$ y $b < c$, se tiene que $b - a$ y $c - b$ pertenecen a $\mathbb{R}^+$. Ahora, por **(A11)**, tenemos que $(b - a) + (c - b)$ pertenece a $\mathbb{R}^+$. Por otro lado, sabemos que $(b - a) + (c - b) = c - a$ (¿ya demostramos esta igualdad?), así que $c - a$ pertenece a $\mathbb{R}^+$, por lo que $a < c$.

(3) A partir de ahora, usaremos la Observación 2. Así, por hipótesis, tenemos que $b - a > 0$. Ahora, note que $b - a = b + 0 - a = b + (c - c) - a = (b + c) - (a + c)$ (no olviden este "truco", ¡sumar un cero!), por lo que $(b + c) - (a + c) > 0$, es decir, $a + c < b + c$.

(4) Por hipótesis, tenemos que $b - a > 0$ y $c > 0$. Luego, por **(A12)**, tenemos que $(b - a)c > 0$. Como $(b - a)c = bc - ac$, se sigue que $bc - ac > 0$, es decir, $ac < bc$.

(5) Como $a \neq 0$, por **(A10),** tenemos que $a > 0$ o bien $-a > 0$. En el primer caso, es decir, si $a > 0$, por **(A12)**, tenemos que $a^2 = a \cdot a > 0$. En el segundo caso, es decir, si $-a > 0$, también por **(A12)**, tenemos que $a^2 = a \cdot a = (-a)(-a) > 0$ (note que aquí usamos el inciso (10) del Teorema 1 de la Clase 1). En cualquier caso, $a^2 > 0$.

En particular, como $1 = 1 \cdot 1 = 1^2$, se tiene que $1 > 0$ ¡Lo logramos! Demostramos que *el uno es mayor que cero.*

■