Última actualización: 5 de julio de 2021

Clase 20

La sesión anterior enunciamos y demostramos el teorema sobre la aritmética de límites de funciones. Este teorema nos permite, a tráves de operaciones "básicas", obtener "muchos" límites de funciones a partir de conocer unos cuantos previamente.

En esta ocasión enunciaremos y demostraremos un teorema que nos permite concluir que el límite de una función es un número l a partir de otras dos funciones que tienen el mismo límite y el "orden" que estas tienen. Dicho teorema da título a esta clase.

El Teorema del Sándwich para límites de funciones

Lema 1 *Sean $l \in \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $c \in \mathbb{R}$ tal que existe $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ con $c \in (a, b)$ y $(a, b) \setminus \{c\} \subseteq A$. Si $f(x) \geq 0$, para toda $x \in (a, b) \setminus \{c\}$ y $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$, entonces $l \geq 0$.*

Demostración. Supongamos que $f(x) \geq 0$, para toda $x \in (a, b) \setminus \{c\}$, que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$, pero que $l < 0$. Así, para el número positivo $-l$, existe $\delta > 0$, tal que para cualquier $x \in (a, b)$ que cumple que $0 < |x - c| < \delta$ se tiene que $|f(x) - l| < -l$. Así, tenemos que $l < f(x) - l < -l$, para toda $x \in (a, b)$ que cumple que $0 < |x - c| < \delta$ y de aquí que

$$f(x) < 0,$$

para toda $x \in (a, b)$ que cumple que $0 < |x - c| < \delta$. Lo que es una contradicción al hecho de que $f(x) \geq 0$, para toda $x \in (a, b) \setminus \{c\}$. Concluimos que $l \geq 0$. $\blacksquare$

Corolario 2 *Sean $l, m \in \mathbb{R}$, $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones y $c \in \mathbb{R}$ tal que existe $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ con $c \in (a, b)$ y $(a, b) \setminus \{c\} \subseteq A$. Si $f(x) \leq g(x)$ para toda $x \in (a, b) \setminus \{c\}$, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$ y $\lim\limits_{x \to c} g(x) = m$, entonces $l \leq m$.*

Demostración. Consideremos la función $g - f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Se tiene que $(g - f)(x) \geq 0$, para toda $x \in (a, b) \setminus \{c\}$. Ahora, usando que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$ y $\lim\limits_{x \to c} g(x) = m$, y el inciso (3) del Teorema 5 de la Clase 19, se tiene que

$$\lim_{x \to c} (g - f)(x) = m - l.$$

Luego, por el lema anterior, se tiene que $m - l \geq 0$, de donde $m \geq l$. $\blacksquare$

Será tentador usar el corolario anterior en la demostración del siguiente resultado, pero debemos tener cuidado, pues para usar dicho corolario es necesario tener como hipótesis que existe el límite de todas las funciones involucradas.

Teorema 3 (del Sándwich) *Sean $l \in \mathbb{R}$, $f, g, h : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tres funciones y $c \in \mathbb{R}$ tal que existe $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ con $c \in (a, b)$ y $(a, b) \setminus \{c\} \subseteq A$. Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, para toda $x \in (a, b) \setminus \{c\}$ y $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l = \lim\limits_{x \to c} h(x)$, entonces*

$$\lim_{x \to c} g(x) = l.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, para toda $x \in (a,b) \setminus \{c\}$, se tiene que

$$|g(x) - f(x)| \leq |h(x) - f(x)|, \tag{1}$$

para toda para toda $x \in (a,b) \setminus \{c\}$. Por otro lado, como $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l = \lim\limits_{x \to c} h(x)$, para el número positivo $\varepsilon/3$, existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que:

(I) $|f(x) - l| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, para toda $x \in (a,b)$ que cumple que $0 < |x - c| < \delta_1$.

(II) $|h(x) - l| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, para toda $x \in (a,b)$ que cumple que $0 < |x - c| < \delta_2$.

Así, si $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, se tiene, para toda $x \in (a,b)$ que cumple que $0 < |x - c| < \delta$, que

$$\begin{aligned}
|g(x) - l| &= |g(x) - f(x) + f(x) - l| && (2)\\
&\leq |g(x) - f(x)| + |f(x) - l| && (3)\\
&\leq |h(x) - f(x)| + |f(x) - l| && (4)\\
&= |h(x) - l + l - f(x)| + |f(x) - l| && (5)\\
&\leq |h(x) - l| + |l - f(x)| + |f(x) - l| && (6)\\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} && (7)\\
&= \varepsilon, && (8)
\end{aligned}$$

donde las desigualdades en (3) y (6) se siguen de la desigualdad del triángulo; la desigualdad en (4) se tiene por (1) y la desigualdad en (7) se obtiene por (I) y (II). Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to c} g(x) = l$. ■

En esta versión del Sándwich también tenemos un diagrama.

$$\begin{tikzcd}
 & f(x) \arrow[d] & \leq & g(x) \arrow[dd, dashed] & \leq & h(x) \arrow[d] \\
x \to c & l & & & & l \\
 & & & l & &
\end{tikzcd}$$

La demostración del siguiente lema es simplemente un ejercicio de escritura, por lo que queda como un ejercicio.

Lema 4 *Sean $l \in \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $c \in \mathbb{R}$ tal que existe $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ con $c \in (a,b)$ y $(a,b) \setminus \{c\} \subseteq A$. Se tiene que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 0$, si y sólo si $\lim\limits_{x \to c} |f|(x) = 0$.*

Surge la pregunta ¿podemos poner l en lugar de 0 en el lema anterior? Es decir, ¿será cierto que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$, si y sólo si $\lim\limits_{x \to c} |f|(x) = |l|$? La necesidad es verdadera, es decir, si $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$, entonces $\lim\limits_{x \to c} |f|(x) = |l|$. Pero la suficiencia no, para ello basta ver el Ejercicio 2 de la Ayudantía 12, en él demostraron que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a cero no existe, pero si consideramos la función $|f|$, en realidad estamos considerando la constante 1 y para este tipo de funciones ya vimos que tiene límite en cualquier $c \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 5 *Muestre que*

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Solución. Para la solución de este ejemplo utilizaremos que $|sen(y)| \leq 1$ para todo $y \in \mathbb{R}$, hecho que quedará aclarado en la siguiente ayudantía.

Ahora, note que la función $f(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ no está definida en cero, así que es un excelente ejemplo de como un límite nos ayudar a saber qué ocurre con una función cerca de un punto "problema". Como $|sen(y)| \leq 1$ para todo $y \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1,$$

para todo $x \neq 0$, de donde

$$0 \leq \left|x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|,$$

para todo $x \neq 0$. Ahora, como $\lim_{x\to 0} x = 0$, por el lema anterior, tenemos que $\lim_{x\to 0} |x| = 0$. Se sigue, del Teorema del Sándwich para funciones, que

$$\lim_{x\to 0} \left|x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| = 0.$$

Finalmente, por el lema anterior, tenemos que

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

$\blacksquare$