Última actualización: 7 de julio de 2021

Clase 21

Antes de iniciar esta sesión conviene recordar que:

$$0 < |x - c| < \delta \Longleftrightarrow x \in (c - \delta, c + \delta) \setminus \{c\}.$$

Y de manera similar podemos (ustedes) ver que

$$0 < x - c < \delta \Longleftrightarrow x \in (c, c + \delta) \qquad \text{y que} \qquad 0 < c - x < \delta \Longleftrightarrow x \in (c - \delta, c).$$

Desde que empezamos este capítulo hemos hecho énfasis en que la pregunta *¿qué ocurre con $f(x)$ si x está "cerca" de c?* tiene sentido si c es un punto al cual nos podemos "acercar" con elementos del dominio de f. Pero, si pensamos en un número c en la recta real podemos "acercarnos" por la derecha o por la izquierda, ¿no?

Límites laterales

Definición 1 *Sean $l \in \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $c \in \mathbb{R}$ tal que existe $b \in \mathbb{R}$ con $(c, b) \subseteq A$. Diremos que **el límite de** $f(x)$, **cuando** x **tiende a** c **por la derecha, es** l, denotado por*

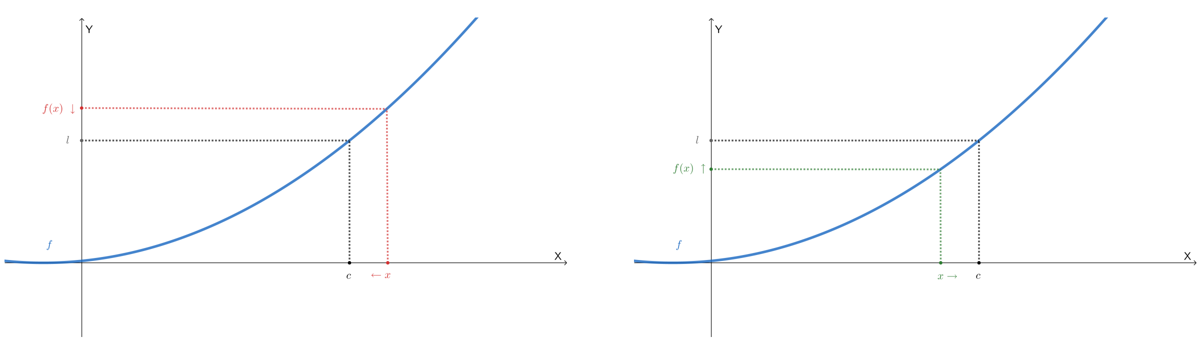
$$\lim_{x \to c^+} f(x) = l,$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $x \in (c, b)$ que cumple que $0 < x - c < \delta$ se tiene que $|f(x) - l| < \varepsilon$. Vea figura 1a.

Definición 2 *Sean $l \in \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $c \in \mathbb{R}$ tal que existe $a \in \mathbb{R}$ con $(a, c) \subseteq A$. Diremos que **el límite de** $f(x)$, **cuando** x **tiende a** c **por la izquierda, es** l, denotado por*

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = l,$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $x \in (a, c)$ que cumple que $0 < c - x < \delta$ se tiene que $|f(x) - l| < \varepsilon$. Vea figura 1b.



(a) Cuando x se "acerca" a c por la derecha, $f(x)$ se "acerca" a l.

(b) Cuando x se "acerca" a c por la izquierda, $f(x)$ se "acerca" a l.

Figura 1

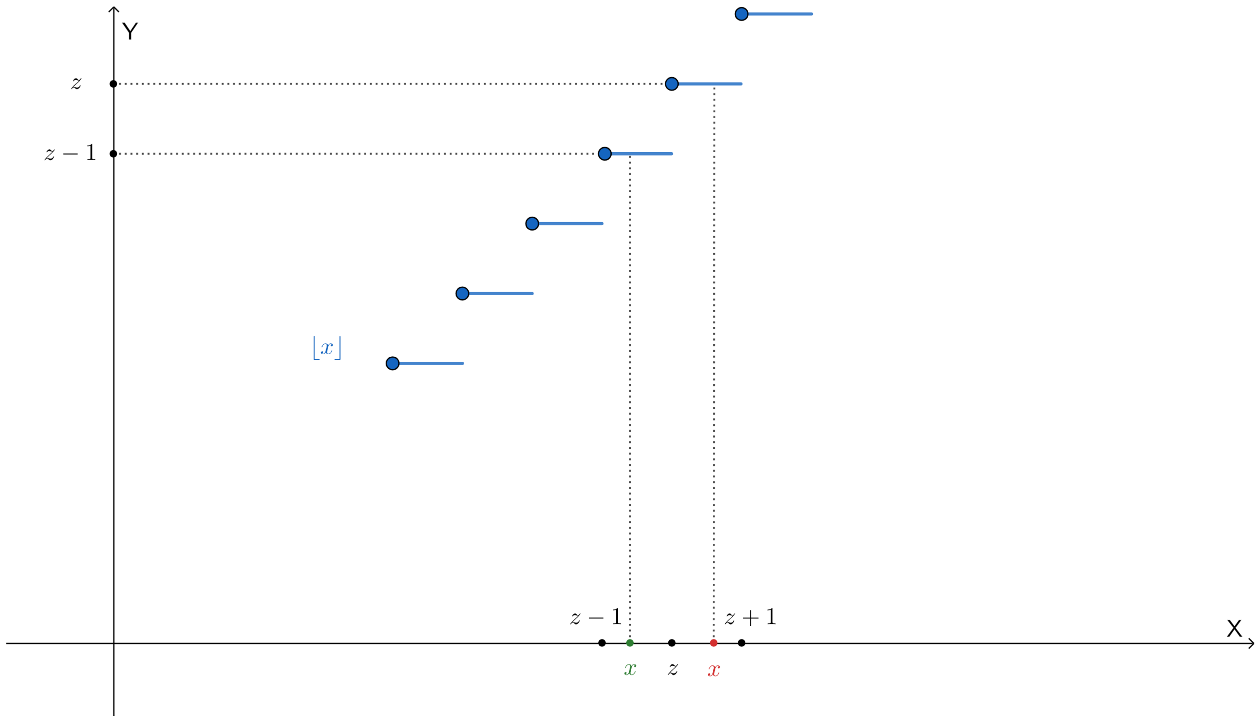


Figura 2: Si $x \in [z-1, z)$, entonces $\lfloor x \rfloor = z - 1$ y si $x \in [z, z+1)$, entonces $\lfloor x \rfloor = z$.

Ejemplo 3 *Sea $n \in \mathbb{Z}$ fijo. Muestre que*

$$\lim_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor = n \qquad y \qquad \lim_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor = n - 1.$$

Solución. Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de $\lfloor x \rfloor$, se tiene que si $x \in [z, z+1)$ para algún $z \in \mathbb{Z}$, entonces $\lfloor x \rfloor = z$, es decir, la función $f(x) = \lfloor x \rfloor$ es "constante a pedazos", vea figura 2.

Por esta razón, si elegimos $\delta = 1/2$, se tiene, para cualquier x que cumpla $0 < x - n < \delta$, que $n < x < n + \dfrac{1}{2}$, de donde

$$x \in [n, n+1).$$

Así, si $0 < x - n < \delta$, entonces $\lfloor x \rfloor = n$ y de aquí que

$$|\lfloor x \rfloor - n| = |n - n| = 0 < \varepsilon.$$

Esto es,

$$\lim_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor = n.$$

Ahora, si x cumple que $0 < n - x < \delta$, entonces $-\dfrac{1}{2} < x - n < 0$, luego $n - \dfrac{1}{2} < x < n$, de donde

$$x \in [n-1, n).$$

Así, si $0 < n - x < \delta$, entonces $\lfloor x \rfloor = n - 1$, por lo que

$$|\lfloor x \rfloor - (n-1)| = |(n-1) - (n-1)| = 0 < \varepsilon.$$

Es decir,

$$\lim_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor = n - 1.$$

■

Podemos aprovechar el ejemplo anterior para notar que, aunque ambos límites laterales existan estos no tienen porque ser iguales. ¿Y cuándo sí lo son?

Teorema 4 *Sean $l \in \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $c \in \mathbb{R}$ tal que existe $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ con $c \in (a,b)$ y $(a,b) \setminus \{c\} \subseteq A$. Se cumple que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = l$ si y sólo si $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ existen y*

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = l = \lim_{x\to c^-} f(x).$$

Demostración. $\Longrightarrow$] Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim\limits_{x\to c} f(x) = l$, existe $\delta > 0$, tal que para cualquier $x \in (a,b)$ que cumple que $0 < |x - c| < \delta$ se tiene que $|f(x) - l| < \varepsilon$.
Ahora, note que:

(I) si $x \in (c,b)$ cumple que $0 < x - c < \delta$, entonces $0 < |x - c| < \delta$, por lo que $|f(x) - l| < \varepsilon$.

(II) si $x \in (a,c)$ cumple que $0 < c - x < \delta$, entonces $0 < |x - c| < \delta$, por lo que $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Es decir, $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = l = \lim\limits_{x\to c^-} f(x)$.
(Note que, en ambos casos, nos sirvió la misma delta.)
$\Longleftarrow$] Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = l = \lim\limits_{x\to c^-} f(x)$, existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que:

(I) para cualquier $x \in (c,b)$ que cumpla que $0 < x - c < \delta_1$, se tiene que $|f(x) - l| < \varepsilon$.

(II) para cualquier $x \in (a,c)$ que cumpla que $0 < c - x < \delta_2$, se tiene que $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Si $x \in (a,b)$ cumple que $0 < |x - c| < \delta$, entonces ocurre que $0 < x - c < \delta$ o que $0 < c - x < \delta$. En el primer caso tenemos, por (I), que $|f(x) - l| < \varepsilon$ y en el segundo caso, por (II), que $|f(x) - l| < \varepsilon$. Esto es, si $x \in (a,b)$ cumple que $0 < |x - c| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$. Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = l$. ■

Ejemplo 5 *Demuestre que, para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, no existe $\lim\limits_{x\to n} \lfloor x \rfloor$.*

Solución. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Vimos en el Ejemplo 3 que, aunque existen $\lim\limits_{x\to n^+} \lfloor x \rfloor$ y $\lim\limits_{x\to n^-} \lfloor x \rfloor$, no son iguales, pues

$$\lim_{x\to n^+} \lfloor x \rfloor = n \neq n - 1 = \lim_{x\to n^-} \lfloor x \rfloor.$$

Así, por el Teorema 4, no existe $\lim\limits_{x\to n} \lfloor x \rfloor$. ■