Última actualización: 14 de julio de 2021

Clase 24

Antes de comenzar esta sesión conviene recordar la definición de continuidad en un punto y el teorema sobre composición de funciones continuas:

Definición 1 *Sean $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $c \in A$ tal que existe $(a, b) \subseteq A$ con $c \in (a, b)$. Diremos que f es continua en c si*

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Teorema 2 *Sean $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, $c \in A$ tal que existe $(a, b) \subseteq A$ con $c \in (a, b)$, $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que existe $(d, e) \subseteq B$ con $f(c) \in (d, e)$. Si f es continua en c y g es continua en $f(c)$, entonces $g \circ f$ es continua en c.*

En esta ocasión estudiaremos algunas consecuencias de la continuidad de una función en un punto.

Consecuencias de la continuidad puntual

Teorema 3 *Sean $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $c \in A$ tal que existe $(a, b) \subseteq A$ con $c \in (a, b)$. Si f es continua en c y $f(c) > 0$, entonces existe un intervalo abierto I tal que $c \in I$ y $f(x) > 0$ para toda $x \in I$.*

Demostración. Como f es continua en c, para el número positivo $f(c)/2$, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $x \in (a, b)$ que cumple que $|x - c| < \delta$ se tiene que $|f(x) - f(c)| < \dfrac{f(c)}{2}$, o de manera equivalente, que

$$-\frac{f(c)}{2} < f(x) - f(c) < \frac{f(c)}{2}.$$

Por lo tanto, si $x \in (a, b)$ cumple que $|x - c| < \delta$, entonces

$$0 < \frac{f(c)}{2} < f(x).$$

Así, si $I = (a, b) \cap (c - \delta, c + \delta)$, se tiene que $c \in I$ y para cada $x \in I$, $f(x) > 0$. ■

¿Es necesaria la hipótesis de continuidad en c? Basta ver la figura 1 para convencerse de que es necesaria.

Corolario 4 *Sean $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $c \in A$ tal que existe $(a, b) \subseteq A$ con $c \in (a, b)$. Si g es continua en c y $g(c) < 0$, entonces existe un intervalo abierto I tal que $c \in I$ y $g(x) < 0$ para toda $x \in I$.*

Demostración. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = -g(x)$. Como g es continua en c, entonces f lo es, además como $g(c) < 0$ se tiene que $f(c) > 0$. Luego, por el teorema anterior, se tiene que existe un intervalo I tal que $c \in I$ y $f(x) > 0$ para toda $x \in I$. Finalmente, $g(x) < 0$, para toda $x \in I$. ■

Es fácil recordar el siguiente teorema con la frase: *Funciones continuas entran/salen del límite.*

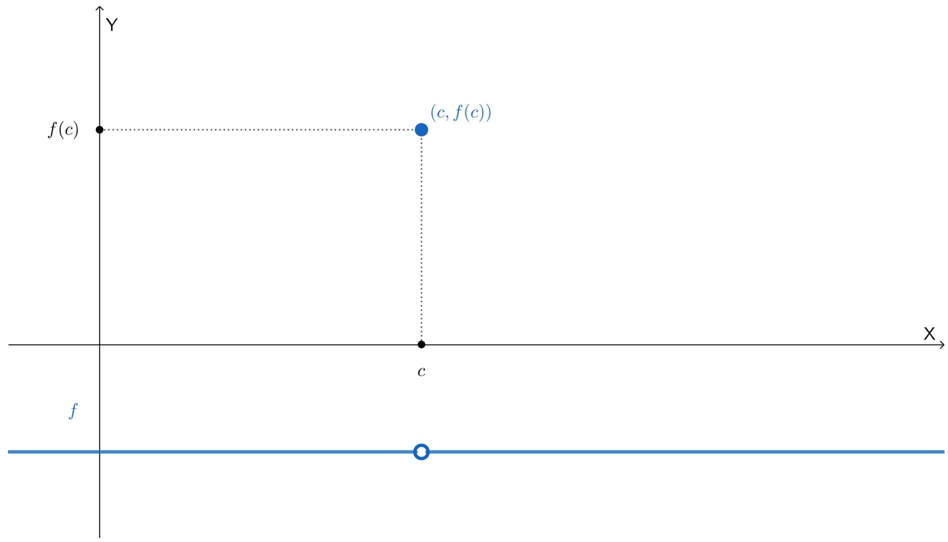

Figura 1: La continuidad de f en c es indispensable en la afirmación del Teorema 3.

Teorema 5 *Sean $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, $c \in \mathbb{R}$ tal que existe $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ con $c \in (a,b)$ y $(a,b) \setminus \{c\} \subseteq A$, $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, $l \in B$ tal que existe $(d,e) \subseteq B$ con $l \in (d,e)$.*
Si $\lim_{x \to c} f(x) = l$ y g es continua en l, entonces

$$\lim_{x \to c} g\left(f(x)\right) = g\left(\lim_{x \to c} f(x)\right).$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como g es continua en l, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $y \in (d,e)$ cumple que $|y - l| < \delta_1$, entonces $|g(y) - g(l)| < \varepsilon$. Ahora, como $\lim_{x \to c} f(x) = l$, para el número positivo $\delta_2 = \min\{\delta_1, e-l, l-d\}$, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $x \in (a,b)$ que cumple que $0 < |x-c| < \delta$ se tiene que $|f(x) - l| < \delta_2$.

Así, si $x \in (a,b)$ cumple que $0 < |x - c| < \delta$, se tiene que $|f(x) - l| < \delta_2$ y de aquí que $|g\left(f(x)\right) - g\left(l\right)| < \varepsilon$. ■

Otra Demostración. Considere la función $F : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq c \\ l & \text{si } x = c. \end{cases}$$

Note que

$$\lim_{x \to c} F(x) = \lim_{x \to c} f(x) = l = F(c),$$

es decir, F es continua en c. Ahora, como g es continua en $l = F(c)$, se tiene, por el Teorema 2, que $g \circ F$ es una función continua en c, así que,

$$\lim_{x \to c} \left(g \circ F\right)(x) = \left(g \circ F\right)(c),$$

es decir,

$$\lim_{x \to c} g\left(f(x)\right) = \lim_{x \to c} g\left(F(x)\right) = g\left(F(c)\right) = g\left(\lim_{x \to c} f(x)\right).$$

■

Ejemplo 6 *Halle, si existe, el siguiente límite*

$$\lim_{x\to\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{x^2-\pi^2}{x-\pi}\right).$$

Solución. Consideremos las funciones f y g dadas por $f(x) = \dfrac{x^2-\pi^2}{x-\pi}$ y $g(y) = \operatorname{sen}(y)$, respectivamente. Note que $\lim_{x\to\pi} f(x) = 2\pi$ y que g es continua en 2π, así que por el Teorema 5, tenemos que

$$\lim_{x\to\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{x^2-\pi^2}{x-\pi}\right) = \operatorname{sen}\left(\lim_{x\to\pi}\frac{x^2-\pi^2}{x-\pi}\right) = \operatorname{sen}(2\pi) = 0.$$

$\blacksquare$

Después de ver cómo aplicar el Teorema 5 uno puede preguntarse por qué no se enunció en el capítulo correspondiente a límites, es decir, si es necesaria la hipótesis de continuidad en l. Veamos que, efectivamente, es necesaria la continuidad en l :

Sean $c, l \in \mathbb{R}$ fijos. Consideremos las funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = l - c + x$ y

$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \neq l \\ 1 & \text{si } y = l. \end{cases}$$

Note que g no es continua en l (¿por qué?), que $\lim_{x\to c} f(x) = l$, además $g(l) = 1$, pero

$$\lim_{x\to c} g\left(f(x)\right) = \lim_{x\to c} 0 = 0.$$

Los Teoremas 3 y 5 son un par de ejemplos de la importancia que tiene la continuidad puntual, pero esta *cobra más fuerza* cuando se tiene en cada punto del dominio de una función. A partir de ahora solo nos ocuparemos de funciones que tienen como dominio un intervalo, note que no se pierde mucho pues para toda la herramienta que hemos desarrollado es necesario poderse "acercarse" a los puntos que nos interesan y esto lo logramos usando intervalos.

Definición 7 *Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es continua en (a,b) si f es continua en cada $c \in (a,b)$.*

Definición 8 *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es continua en $[a,b]$ si f es continua en cada $c \in (a,b)$ y además*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \qquad y \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b).$$

El siguiente resultado es parte de la próxima lista de ejercicios, pues la demostración es bastante similar a la del Teorema 3.

Ejercicio 9 *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$. Muestre que si $f(a) > 0$ ($f(b) > 0$), entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in [a, a+\delta)$ (para todo $x \in (b-\delta, b]$).*