Última actualización: 15 de julio de 2021

Clase 25

Recordemos, antes de comenzar esta sesión, la definición de continuidad en un intervalo:

Definición 1 *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es continua en $[a, b]$ si f es continua en cada $c \in (a, b)$ y además*

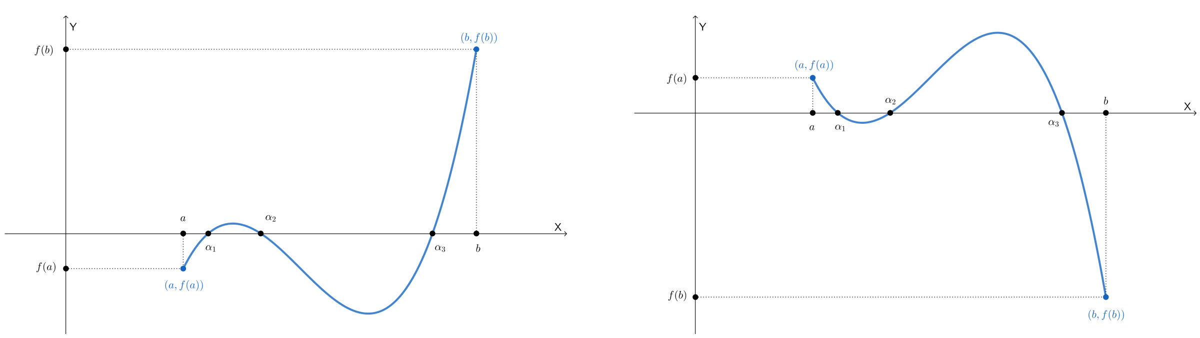
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \qquad y \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

También conviene recordar el siguiente ejercicio:

Ejercicio 2 *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Muestre que si $f(a) > 0$ ($f(b) > 0$), entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in [a, a + \delta)$ (para todo $x \in (b - \delta, b]$).*

En esta sesión notaremos la “fuerza” que adquiere la continuidad cuando se tiene en todo un intervalo cerrado.

Teorema del Valor Intermedio



(a) (b)

Figura 1: Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y en los extremos de dicho intervalo toma valores con signos distintos, entonces la gráfica “cruza” el eje X y puede hacerlo en varias ocasiones.

Teorema 3 *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Si $f(a)f(b) < 0$, entonces existe $\alpha \in (a, b)$ tal que $f(\alpha) = 0$.*

Demostración. Supongamos que $f(a) < 0 < f(b)$, vea figura 1a. Ahora, consideremos el conjunto

$$A = \{x \in [a, b] \mid f(y) < 0 \text{ para todo } y \in [a, x]\}.$$

Note que $A \neq \varnothing$, pues $a \in A$ y como $A \subseteq [a, b]$, entonces A es un conjunto acotado, en particular es un conjunto acotado superiormente. Sea entonces $\alpha = \sup A$.

Como $f(a) < 0 < f(b)$, existe $\delta > 0$, de tal manera que:

(I) $f(x) < 0$ para todo $x \in [a, a + \delta)$ y

(II) $f(x) > 0$ para todo $x \in (b - \delta, b]$.

De (I), se sigue que si $x \in (a, a+\delta)$, entonces $x \in A$ y de aquí que

$$a < x \leq \alpha. \tag{1}$$

Ahora, de (II), se tiene que si $x \in (b-\delta, b)$, entonces x es cota superior de A, por lo que

$$\alpha \leq x < b. \tag{2}$$

Así, de (1) y (2), tenemos que $a < \alpha < b$, es decir, $\alpha \in (a, b)$.

Veamos ahora que $f(\alpha) = 0$ y para ello descartaremos que $f(\alpha) < 0$ y que $f(\alpha) > 0$. Supongamos primero que $f(\alpha) < 0$. En este caso, por el Ejercicio 2, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ se tiene que $f(x) < 0$.

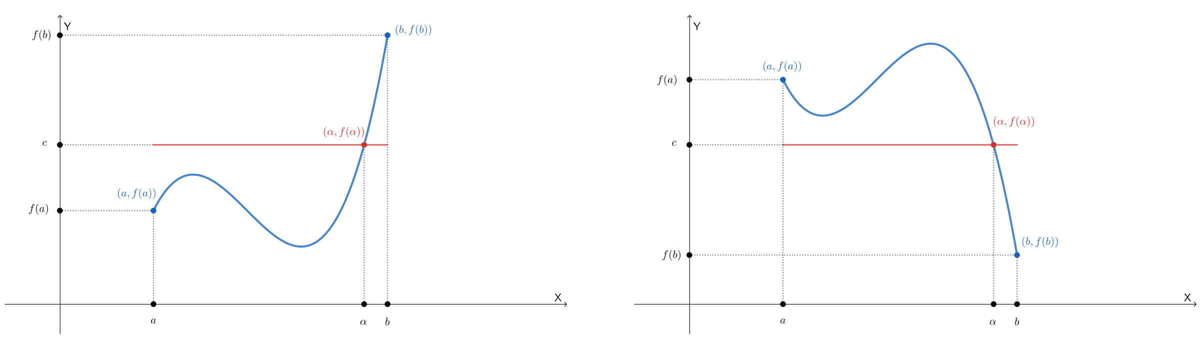
Luego, por ser $\alpha = \sup A$, existe $x_0 \in A$ tal que $\alpha - \delta < x_0 < \alpha$. Se sigue, de la definición del conjunto A, que $f(x) < 0$ para todo $x \in [a, x_0]$.

Por otro lado, si $x_1 \in (\alpha, \alpha + \delta)$, entonces $f(x) < 0$, para todo $x \in [x_0, x_1]$, de donde $f(x) < 0$, para todo $x \in [a, x_1]$. Esto es, $x_1 \in A$, pero esto contradice el hecho de que $\alpha = \sup A$. Así, $f(\alpha) \geq 0$.

Supongamos ahora que $f(\alpha) > 0$. En este caso, por el Ejercicio 2, tenemos que existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$, $f(x) > 0$.

Luego, por ser $\alpha = \sup A$, existe $x_0 \in A$ tal que $\alpha - \delta < x_0 < \alpha$, de donde $f(x) < 0$ para todo $x \in [a, x_0]$, lo que contradice el hecho de que $f(x) > 0$ para todo $x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$. Concluimos entonces que $f(\alpha) = 0$.

El caso en que que $f(b) < 0 < f(a)$, vea figura 1b, se demuestra de manera simétrica. ■



(a) (b)

Figura 2: Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y c es un número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces f lo "alcanza", es decir, existe $\alpha \in (a, b)$ tal que $f(\alpha) = c$.

Corolario 4 *Sean $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y $c \in \mathbb{R}$. Si $f(a) < c < f(b)$, entonces existe $\alpha \in (a, b)$ tal que $f(\alpha) = c$, vea figura 2a.*

Demostración. Sea $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $g(x) = f(x) - c$. Note que g es una función continua en $[a, b]$, además $g(a) < 0 < g(b)$. Así, por el teorema anterior, se tiene que existe $\alpha \in (a, b)$ tal que $g(\alpha) = 0$, es decir, $f(\alpha) = c$. ■

Corolario 5 *Sean $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y $c \in \mathbb{R}$. Si $f(a) > c > f(b)$, entonces existe $\alpha \in (a, b)$ tal que $f(\alpha) = c$, vea figura 2b*

Demostración. Sea $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $g(x) = -f(x)$. Note que g es una función continua en $[a, b]$, además $g(a) < -c < g(b)$. Así, por el corolario anterior, se tiene que existe $\alpha \in (a, b)$ tal que $g(\alpha) = -c$, es decir, $f(\alpha) = c$. ■

Corolario 6 (Teorema del Valor Intermedio) *Sean $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $d, e \in [a, b]$, con $d < e$. Si f es continua en $[a, b]$, entonces f toma cualquier valor entre $f(d)$ y $f(e)$, vea figura 3.*

Demostración. Como f es continua en $[a, b]$, entonces f es continua en $[d, e]$. Así, si $f(d) < f(e)$ y $c \in \mathbb{R}$ cumple que $f(d) < c < f(e)$, por el Corolario 4 aplicado a f en $[d, e]$, tenemos que existe $\alpha \in (d, e)$ tal que $f(\alpha) = c$. Ahora, si ocurre que $f(d) > f(e)$ y $c \in \mathbb{R}$ cumple que $f(d) > c > f(e)$, por el Corolario 5 aplicado a f en $[d, e]$, se tiene que existe $\alpha \in (d, e)$ tal que $f(\alpha) = c$. Finalmente si $f(d) = f(e)$, es claro que f toma dicho valor. En cualquier caso, f toma cualquier valor entre $f(d)$ y $f(e)$. ■

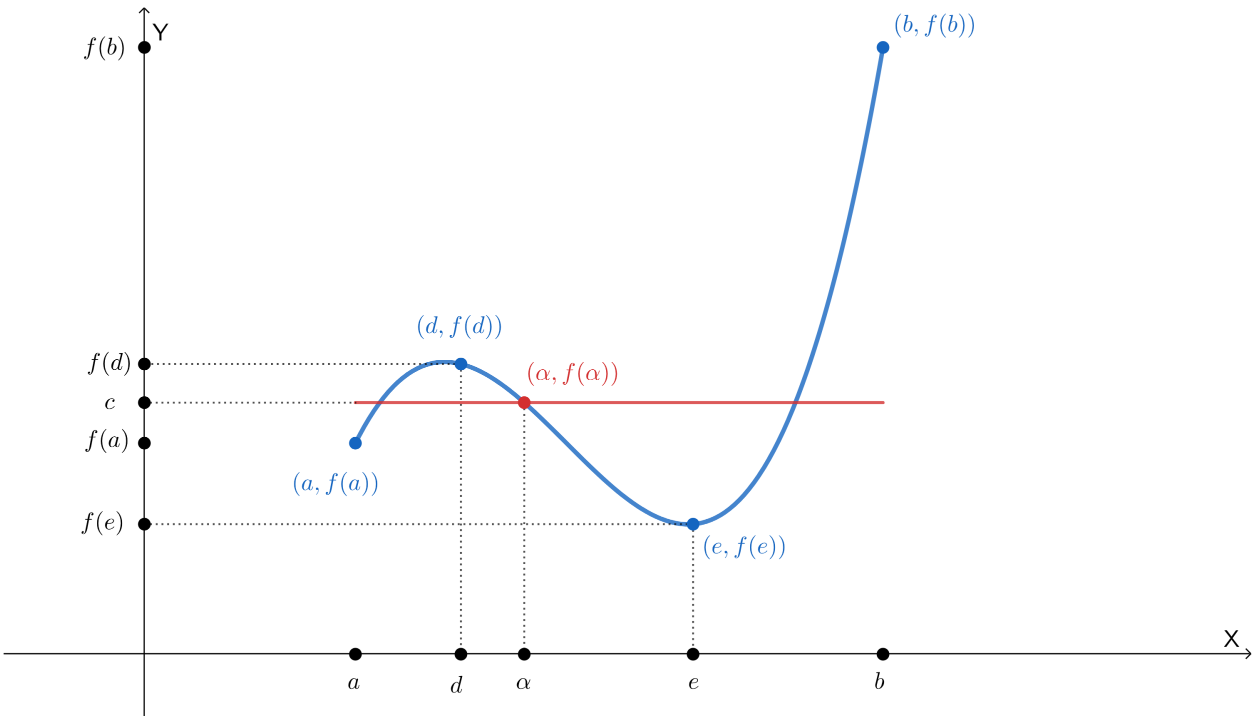


Figura 3: Teorema del Valor Intermedio.